

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală Dâmbovița – 21 Februarie 2016

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $x = \lg a$, $y = \log_6 a$, $z = \log_{15} a$. Demonstrați că:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a}.$$

Subiectul 2. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $f(f(x)) = x^2$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

a) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

b) Arătați că: $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x})$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

c) Calculați $f(1)$.

Subiectul 3. Demonstrați că, pentru orice numere reale $x, y, z \geq 1$, avem:

$$x \log_2(2^y + 2^z) + y \log_2(2^z + 2^x) + z \log_2(2^x + 2^y) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

GM

Subiectul 4. Se consideră trei numere distincte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu modulele egale și definim:

$$a = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}, \quad b = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3}, \quad c = \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}.$$

Demonstrați că, dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$, atunci $a = b = c$.

GM