



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală

17 februarie 2019

Clasa a IX-a

1. a) Să se afle triunghiurile dreptunghice care au lungimile laturilor numere întregi în progresie aritmetică.

b) Determinați tripletele de numere naturale în progresie aritmetică strict crescătoare, prime între ele două câte două, știind că produsul lor divide suma cuburilor lor.

2. Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x + y + z = 1$. Arătați că:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \in [2, 3).$$

3. Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}$ să fie rațional.

4. Se consideră triunghiul ABC , M este mijlocul lui (AC) , $N \in (BM)$, astfel încât $\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{BN}$ și $P \in (BC)$, astfel încât $\overrightarrow{PC} = -6\overrightarrow{PB}$.

a) Demonstrați că punctele A, N, P sunt coliniare.

b) Dacă $Q \in (AB)$, astfel încât $PQ \parallel AC$, demonstrați că dreptele AP , BM și CQ sunt concurente.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.