



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

Problema 1

Fie funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1+\sin x - \cos x}{x + e^{x+2015} + \sin x}$. Determinați primitiva $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , știind că $F(0) = 1$.

Problema 2

Pe intervalul $G_a = (a, +\infty)$ cu $a \in \mathbb{R}$, se definește legea de compoziție $*$: $G_a \times G_a \rightarrow G_a$ prin

$$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a.$$

- Demonstrați că $(G_a, *)$ este grup abelian.
- Demonstrați că oricare ar fi numărul real a , grupul $(G_a, *)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulțirea.
- Calculați $x_*^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dacă funcțiile $f_k: G \rightarrow G$,

$f(x) = x^k, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G, \cdot)$, demonstrați că n este număr prim.

Problema 4

Determinați funcțiile derivabile $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

(1) derivata f' este continuă și $0 < f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$;

(2) $f(0) = 0$

și

(3) pentru o primitivă F a funcției f^2 cu $F(0) = 0$, avem $F(1) = \frac{f^3(1)}{3}$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Pentru fiecare problemă se acordă de la 0 la 7 puncte.