

11

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XI – a

SUBIECTE:

1. a) Se consideră matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^{2023} = X^{2022}$. Demonstrați că $X^3 = X^2$.

(4p)

b)) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$, unde α și β sunt constante reale.

Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

(3p)

2. Se consideră $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA \neq O_2$. Dacă $\det A = \det B = 0$, demonstrați că $\det(aA + bB) = 0$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{C}$.

(7p)

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = \sqrt{1 + nx_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n} \right)^n$.

(7p)

4. a) Fie funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2^{f(x)} \leq x < 2^{f(x)+1}$, $\forall x > 1$. Determinați mulțimea punctelor în care f nu are limită.

(3p)

b) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale cu $x_2 > x_1 > 0$, care are proprietatea:

$$x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k, \forall n \geq 2.$$

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

(4p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.