



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $x, y, z \in [a, b]$. Demonstrați că media aritmetică a numerelor x, y și z se găsește de asemenea în intervalul $[a, b]$.
b) Fie A_1, A_2, A_3 trei puncte necoliniare. Notăm $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$, notăm cu A_n centrul de greutate al triunghiului $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$, iar pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.
 - i. Calculați x_6 și y_6 .
 - ii. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, avem $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ și $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin: $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2 + 2n}$, $\forall n \geq 1$.
 - a. Aflați termenul general al sirului.
 - b. Calculați suma $S = \sum_{k=1}^n (2k+1)a_k^2$ și arătați că $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Considerăm paralelogramul $ABCD$ și fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Fie punctul M pe segmentul $[AD]$ și fie punctul D pe segmentul $[NC]$. Să se arate că punctele G, M, N sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. În triunghiul ABC cu $m(\angle ACB) = 90^\circ$, considerăm punctele $M \in (BC)$, $Q \in (AB)$ respectiv $N \in (AC)$ astfel încât $MQNC$ să fie dreptunghi. Dacă punctele I și G sunt centrul cercului înscris triunghiului ABC , respectiv centrul dreptunghiului $MQNC$, demonstrați că punctele A, I, G sunt coliniare dacă și numai dacă $AQ = AC$.

Prof. Alexandru Blaga



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Legyenek az $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ számok és $x, y, z \in [a, b]$. Bizonyítsátok be, hogy az x, y és z számok számtani közeparányosa is eleme az $[a, b]$ intervallumnak.
- b) Legyenek az A_1, A_2, A_3 nem kollineáris pontok. Jelöljük $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Bármely $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$ esetén az $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$ háromszög súlypontját jelöljük A_n -nel, valamint bármely $n \in \mathbf{N}^*$ esetén legyenek az $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.
- i. Számítsátok ki x_6 és y_6 .
- ii. Mutassátok ki, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$ esetén $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ és $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Legyen $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy : $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall n \geq 1$.
- a. Határozzátok meg a sorozat általános tagját..
- b. Számítsátok ki az $S = \sum_{k=1}^n (2k+1)a_k^2$ összeget és igazoljátok, hogy $S < 1$.

Prof. Traian Tămăian

3. Legyen $ABCD$ paralelogramma és G az ABC háromszög súlypontja . Legyen M az $[AD]$ szakasz egy pontja és D az $[NC]$ szakasz egy pontja. Igazoljátok, hogy G, M, N pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. Az ABC háromszögben $m(\angle ACB) = 90^\circ$. Legyen $M \in (BC)$, $Q \in (AB)$ illetve $N \in (AC)$ úgy, hogy $MQNC$ téglalap. Ha I az ABC háromszögbe írt kör középpontja és G az $MQNC$ téglalap középpontja, igazoljátok, hogy az A, I és G pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $AQ = AC$.

Prof. Alexandru Blaga



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Es sei $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ und $x, y, z \in [a, b]$. Beweist dass, das aithmetische Mittel der Zahlen x, y und z auch in die Intervall $[a, b]$ sind.
- b) Es sei A_1, A_2, A_3 drei nicht kollinerae Punkten. Bezeichnet man $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Für jedwelche $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$, bezeichnet man A_n der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$, aber für jede $n \in \mathbf{N}^*$, nimmt man $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ so, dass $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.

i. Berechnet x_6 und y_6 .

ii. Zeigt, dass für jede $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, gibt es $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ und $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Es sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge die durch : $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall n \geq 1$ defieniert ist.
- a. Bestimmt die allgemeine Glied der Folge.
- b. Berechnet die Summe $S = \sum_{k=1}^n (2k+1)a_k^2$ und zeigt dass $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Es sei das Parallelogramm $ABCD$ und G Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Es sei der Punkt M auf die Strecke $[AD]$ und der Punkt D auf die Strecke $[NC]$. Zeigt, dass die Punkten G, M, N kollinear sind wenn und nur wenn $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. Im Dreieck ABC mit $m(\angle ACB) = 90^\circ$, nehmen die Punkten $M \in (BC)$, $Q \in (AB)$ bzw. $N \in (AC)$ so, dass $MQNC$ Rechteck sei. Wenn die Punkten I und G die Mitellpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC , bzw Mitellpunkt des Rechtecks $MQNC$ sind, beweist dass die Punkten A, I, G kollinear sind wenn und nur wenn $AQ = AC$.

Prof. Alexandru Blaga



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

I. a. Arătați că $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} \geq 6, \quad \forall a, b, c \in (0, \infty)$

b. Rezolvați inecuația $18^x + 12^x + 9^x + 3^x + 4^x + 2^x \leq 6 \cdot 6^x$

Prof. Galambosi Csaba, Satu Mare

II. a. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(f(x)) + 2012 \cdot f(x) = x^{2013}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că f este injectivă.

b. Există funcții $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, injective, astfel încât $f(x) + f(2^x) + f(\log_2 x) = 2013,$
 $\forall x \in (1, \infty)$?

Prof. Tămâian Traian, Carei

III. Fie numerele complexe distincte a, b, c, d cu $a + b + c + d = 0$ și $|a| = |b| = |c| = |d|$. Să se arate că: a). $(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) = 0$

b). Dacă $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{a, b, c, d\}$ și $\alpha + \beta = 0$ să se arate că a, b, c, d sunt rădăcinile ecuației $z^4 + (\alpha\beta + \gamma\delta) \cdot z^2 + \alpha\beta\gamma\delta = 0$

Prof. Pop Ovidiu, Satu Mare

IV. Fie patrulaterul $ABCD$ inscriptibil cu laturile de lungimi a, b, c, d și diagonalele de

lungimi d_1 și d_2 . Să se demonstreze că $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq 4 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right)$.

Prof. Buth Gigel, Satu Mare

Matematician. Râmbu Gelu, Baia Mare



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

I. a. Igazold, hogy $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} \geq 6, \quad \forall a, b, c \in (0, \infty)$

b. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget: $18^x + 12^x + 9^x + 3^x + 4^x + 2^x \leq 6 \cdot 6^x$

Prof. Galambosi Csaba, Satu Mare

II. a. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$f(f(x)) + 2012 \cdot f(x) = x^{2013}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Igazold, hogy f injektív.

b. Léteznek olyan $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, injektív függvények, melyekre

$$f(x) + f(2^x) + f(\log_2 x) = 2013, \quad \forall x \in (1, \infty) ?$$

Prof. Tămăian Traian, Carei

III. Adottak az a, b, c, d különböző komplex számok úgy, hogy $a + b + c + d = 0$ és

$$|a| = |b| = |c| = |d|.$$

Igazold, hogy a). $(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) = 0$

b). Ha $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{a, b, c, d\}$ és $\alpha + \beta = 0$ mutasd meg, hogy a, b, c, d

az $z^4 + (\alpha\beta + \gamma\delta) \cdot z^2 + \alpha\beta\gamma\delta = 0$ egyenlet gyökei.

Prof. Pop Ovidiu, Satu Mare

IV. Adott az $ABCD$ körbeírható négyszög, melynek oldalainak hossza a, b, c, d és

átlóinak hossza d_1 és d_2 . Igazold, hogy $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq 4 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right).$

Prof. Buth Gigel, Satu Mare

Matematician. Râmbu Gelu, Baia Mare



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_2(C)$. Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$, pentru orice $x \in C$.

b) Dacă $A \in M_2(C)$ cu $TrA = 2$ și $\det A = 3$ demonstrați că:

$$2 \cdot \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$$

prof. Traian Tămîian, Carei

2. Dacă $A, B \in M_2(C)$ astfel încât $\det(AB+BA) - \det(AB-BA) = 4 \cdot \det A \cdot \det B$, să se arate că:

a.) $\det(AB-BA) = 0$

b.) $(AB - BA)^2 = O_2$

prof. Ovidiu Pop, Satu Mare

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ unde $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} + 2, & \text{daca } n \text{ este par} \\ a_n + \frac{2}{n}, & \text{daca } n \text{ este impar} \end{cases}$.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

RMT

4. Se consideră șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \frac{2n+3-n! \cdot a_n}{(n+1)!}$, $n \geq 1$.

a.) Arătați că șirul este convergent.

b.) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln[(n-1)! \cdot a_n]$

prof. Bud Adrian, Negrești-Oaș



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

1. a) Legyen $A \in M_2(C)$. Igazoljuk, hogy $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$, bármely $x \in C$.

b) Ha $A \in M_2(C)$ úgy, hogy $TrA = 2$ és $\det A = 3$ igazoljuk, hogy:

$$2 \cdot \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$$

prof. Traian Tămâian, Carei

2. Legyen $A, B \in M_2(C)$ úgy, hogy $\det(AB+BA) - \det(AB-BA) = 4 \cdot \det A \cdot \det B$. Igazoljuk, hogy:

a.) $\det(AB-BA) = 0$

b.) $(AB - BA)^2 = O_2$

prof. Ovidiu Pop, Satu Mare

3. Adott $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat, ahol $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} + 2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ a_n + \frac{2}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$.

Igazoljuk, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

RMT

4. Legyen $(a_n)_{n \geq 1}$ természetes számokból álló sorozat, ahol $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = \frac{2n+3-n! \cdot a_n}{(n+1)!}$, $n \geq 1$.

a.) Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens.

b.) Számítsuk ki: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln[(n-1)! \cdot a_n]$

prof. Bud Adrian, Negrești-Oaș



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

I) Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$

a) Demonstrați ca $(M, \cdot)$ este monoid.

b) Fie $A \in M$ și $X \in M_2(Z)$. Arătați că dacă $AX = XA$, atunci $X \in M$ sau există $\alpha \in Z$ astfel încât $A = \alpha \cdot I_2$.

c) Demonstrați că M are o infinitate de elemente inversabile.

G.M. 10/2012

II) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu e elementul neutru și $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Arătați că: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} \cdot y^{2013} = x \cdot y$.

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. Traian Tămăian

III) a) Verificați identitatea: $\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right)' = -\frac{\sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2}, \forall x \in (1, \infty)$.

b) Calculați $\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2} \cdot e^x dx, \quad x \in (1, \infty)$.

Prof. Adrian Bud

IV) Fie $a > 0$ și funcția $f: [0, a] \rightarrow R$, de două ori derivabilă pe $[0, a]$, cu derivate a doua continuă pe $[0, a]$

și $f(a) = f'(a) = 0$. Să se arate că pentru orice $k \in \{1, 2\}$ au loc relațiile

$$a) \int_0^a f(x) dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x) dx,$$

$$b) \left(\int_0^a f(x) dx \right)^2 \leq \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx.$$

Prof. Gigel Buth și matematician Gelu Râmbu



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

I) Adott a következő halmaz: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

a) Bizonyítsuk be, hogy $(M, \cdot)$ monoid.

b) Legyen $A \in M$ és $X \in M_2(\mathbb{Z})$. Ha $AX = XA$, akkor igazoljuk, hogy $X \in M$ vagy létezik $\alpha \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $A = \alpha \cdot I_2$.

c) Igazoljuk, hogy M -nek végtelen sok invertálható eleme van.

G.M. 10/2012

II) Legyen $(G, \cdot)$ csoport, melynek semleges eleme e , és $x, y \in G$, úgy, hogy $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Igazoljuk, hogy: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} \cdot y^{2013} = x \cdot y$.

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. Traian Tămîian

III) a) Ellenőrizzük a következő azonosságot: $\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right)' = -\frac{\sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2}, \forall x \in (1, \infty)$.

b) Számítsuk ki: $\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2} \cdot e^x dx, \quad x \in (1, \infty)$.

Prof. Adrian Bud

IV) Legyen $a > 0$ és az $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ a $[0, a]$ -n kétszer deriválható függvény, melynek a másodrendű deriváltja folytonos a $[0, a]$ intervallumon, és $f(a) = f'(a) = 0$. Mutassuk ki, hogy bármely $k \in \{1, 2\}$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\text{a) } \int_0^a f(x) dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x) dx,$$

$$\text{b) } \left(\int_0^a f(x) dx \right)^2 \leq \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx.$$

Prof. Gigel Buth és Gelu Râmbu matematikus