OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013

CLASA a XI-a

1. Fie A, B, C trei matrice pătratice de ordin n, $n \geq 2$, cu elemente din mulţimea numerelor reale, care satisfac egalitatea $ABC + A + B + C = AB + AC + BC$. Arătaţi că matricea A este inversabilă dacă și numai dacă matricea $BC - B - C$ este inversabilă.

2. a) Aflați valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 13 & 8 \\ 9 & 8 & 43 & 5 \\ 91 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix}$.

   b) Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, AC, AB ale triunghiului ABC. Arătați că valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} -a & a - 2c\cos B & a \\ b & -b & b - 2a\cos C \\ c - 2b\cos A & c & -c \end{vmatrix}$ este zero.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie surjectivă și crescătoare.
   a) Arătați că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
   b) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(1) + f^2(2) + f^3(3) + \ldots + f^n(n)}{f^n(n)}$.

4. Fie M o mulţime infinită de numere reale cu proprietatea că pentru orice submulțime finită $S \subset M$ este îndeplinită condiția $\sum\limits_{x \in S} |x| \geq (\operatorname{card} S)^2$, unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real x, iar $\operatorname{card} S$ reprezintă numărul de elemente ale mulțimii S.
   a) Arătați că există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ cu elemente din M astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = \infty$.
   b) Arătați că mulțimea M este numărabilă.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.