



Olimpiada de matematică, Etapa locală, 13 februarie 2017

Clasa a IX-a

Subiectul I Pentru  $n$  număr natural nenul și  $A$  submulțime a lui  $\mathbb{R}$  spunem că  $A$  are proprietatea  $P(n)$  dacă și numai dacă  $\text{card } A \geq n$  și pentru oricare  $n$  elemente distincte din  $A$  media lor aritmetică este tot în  $A$ .

i) pentru  $n$  în mulțimea  $\{1;2;3\}$  determinați pe rând toate submulțimile  $A$  ale lui  $\mathbb{R}$  care verifică proprietatea  $P(n)$ ;

ii) arătați că pentru  $n$  natural,  $n \geq 4$  și  $A$  are proprietatea  $P(n)$  avem  $\text{card } A = n$ .

Șerban Olteanu, Giurgiu

Subiectul II Dacă  $a, b, c \geq 0$ , demonstrați că:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{c+a}{2}\right)^3 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Paul Băiatu, Giurgiu

Subiectul III Se consideră triunghiul  $ABC$ , punctele  $D$  și  $F$  situate pe  $BC$  respectiv pe  $AB$  astfel încât  $\vec{FA}/\vec{FB} = -3/2$ ,  $O$  este punctul de intersecție al dreptelor  $AD$  și  $CF$  iar  $\vec{OA}/\vec{OD} = -15/8$ . Dacă punctul  $E$  este intersecția dreptelor  $BO$  și  $AC$ , să se arate că vectorii  $\vec{u} = 12\vec{OD} + 11\vec{OE}$  și  $\vec{v} = \vec{AC} - \vec{AB}$  sunt coliniari.

Elena Țincu, Giurgiu

Subiectul IV Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $AB = 4$  cm,  $AC = 12$  cm  $BC = 2\sqrt{22}$  cm.

Bisectoarea unghiului  $BAC$  și perpendiculara dusă din punctul  $B$  pe dreapta  $AC$  se intersectează în punctul  $O$  iar punctul  $P$  se află pe dreapta  $BC$  astfel încât  $\vec{PB}/\vec{PC} = -5/9$ .

a) să se demonstreze că dreapta  $CO$  trece prin mijlocul segmentului  $[AB]$ ;

b) să se exprime vectorul  $\vec{OP}$  în funcție de  $\vec{AB}$  și  $\vec{AC}$  și să se determine modulul său.

Ion Staicu, Giurgiu

Nota : Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect primește între 0 puncte și 7 puncte.

**Subiectul I** Se consideră ecuația :

$$x^{\log_2 x} + 2\sqrt{2} x - 2\sqrt{2} = 0.$$

- a) să se arate că soluțiile ecuației sunt subunitare;  
b) să se rezolve ecuația.

Ionel Tudor, Călugăreni

**Subiectul II.** Demonstrați că există funcții exponențiale care verifică egalitatea:

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{5} f(x), \text{ pentru orice } x \text{ real.}$$

\*\*\*\*

**Subiectul III** Dacă  $z$  este număr complex, rădăcină a ecuației :

$$\frac{-\operatorname{Re} z}{4} + \frac{-\operatorname{Im} z}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} |z| \quad \text{și mulțimea}$$

$A = \{ z^n / n \text{ număr natural nenul} \}$  este finită atunci determinați  $z$  și  $\operatorname{card} A$ .

Șerban Olteanu , Giurgiu

**Subiectul IV** Să se determine numerele complexe  $z$  pentru care are loc relația:

$$|z| + |z-5i| = |z-2i| + |z-3i|$$

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 3 ore

Pentru fiecare subiect se acordă între 0 puncte și 7 puncte

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 18 februarie 2017

Clasa a XI-a

**Subiectul I** Fie  $A$  o matrice pătrată de ordinul 3 cu coeficienți reali care verifică proprietățile  $\det A = 2017$  și  $\det(A + i {}^t A) = 0$ , unde  ${}^t A$  este transpusa matricei  $A$ . Arătați că pentru oricare  $k$  număr întreg avem :

$\det(A + k {}^t A)$  este număr întreg divizibil cu 2017.

Șerban Olteanu , Giurgiu

**Subiectul II** Se consideră permutarea :  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  din  $S_3$ . Să se rezolve în

$S_3$  ecuatia :  $x^2 = \sigma^{-1} \sigma^{-1}$  fiind inversa permutării .

Monica Coadă , Giurgiu

**Subiectul III** Se consideră șirul  $(a_n)$  definit prin :  $a_1 = a$ ,  $a$  situat în intervalul  $(7;8)$

$a_{n+1} = a_n^2 - 14a_n + 56$ ,  $n \geq 1$ . Să se arate că șirul  $(a_n)$  este convergent și să se afle limita sa.

Tănțica Dorela Frâncu , Giurgiu

**Subiectul IV** Se consideră o funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periodică și cu proprietatea că există

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Să se arate că  $f$  este constantă

Nota : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 3 ore

Pentru fiecare subiect se acordă între 0 puncte și 7 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 18 februarie 2017

Clasa a XII-a

Subiectul I. Se consideră multimea  $G = \{5; 6\}$  și legea de compoziție :

$$x * y = \frac{11xy - 60x - 60y + 330}{2xy - 11x - 11y + 61} \quad (x-5)(y-5)$$

a) să se verifice că  $x * y = 5 + \frac{(x-5)(y-5)}{(x-5)(y-5) + (x-6)(y-6)}$

b) să se arate că  $(G, *)$  este grup abelian

Ionica Daniela Cristian, Giurgiu

Subiectul II Fie  $A$  o multime nevidă finită.

a) arătați că există o lege de compoziție "o" pe multimea  $A$  astfel încât  $(A, o)$  să fie grup abelian;

b) determinați  $\text{card} A$  știind că există 217 dar nu mai mult de 2017 legi de compoziție "\*" pe  $A$  cu  $(A, *)$  grup izomorf cu  $(A, o)$ .

Șerban Olteanu, Giurgiu

Subiectul III. Să se calculeze :

$$\int_1^4 \frac{2x+11}{x(x+5)(x+6)(x+11)+225} dx$$

Subiectul IV Să se calculeze : a)  $\int \log_{2017} x \, dx, \quad x > 0$

b)  $\int \frac{2017^x}{2017^{4x} + 2017^{2x} + 1} dx, \quad x \in \mathbb{R}$

Mădălina Mocanu, Giurgiu

Nota : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acorda între 0 puncte și 7 puncte.