

OLIMPADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

27 ianuarie 2018

BAREM DE NOTARE

CLASA A VII-A

1.)	Din oficiu	1p
a.)	$\text{Avem } \frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{n(4n+4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) =$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n+1-n}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)}$	2p
	Egalitatea devine: $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{3\sqrt{10}}{19} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{6\sqrt{10}}{19}$	1p
	Prin ridicare la pătrat obținem $\frac{n}{n+1} = \frac{360}{361}$, de unde avem $n = 360$	1p
b.)	$5xy + 11z = 5 \cdot 11 \Rightarrow z : 5$	1p
	Dacă $z = 0$, atunci $xy = 11 \Rightarrow x = 1, y = 11$ sau $x = 11, y = 1$	1p
	Dacă $z = 5$, atunci $xy = 0 \Rightarrow x = 0, y \in \mathbb{N}$ sau $x \in \mathbb{N}, y = 0$	1p
	Pentru $z > 5 \Rightarrow xy < 0$, ecuația nu are soluții pe $\mathbb{N}$	1p
	Deci $S = \{(1, 11, 0); (11, 1, 0); (0, n, 5); (n, 0, 5)\}, n \in \mathbb{N}$	1p

2.)	Din oficiu	1p
	Fie x, y sumele primite de cel mijlociu, respectiv de cel mai mic dintre frați. $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$	1p
	Cel mijlociu și cel mai mic au primit împreună $100\% - 34\% = 66\%$ din suma totală.	1p
	$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = k \Rightarrow x = 4k, y = 7k \Rightarrow x + y = 11k$ $x + y = 11k$ reprezintă 66% din sumă.	1p
	$x = 4k$ reprezintă $4 \cdot (66\% : 11) = 24\%$ din sumă.	1p
	$y = 7k$ respectiv $7 \cdot (66\% : 11) = 42\%$ din sumă.	1p
	24 lei reprezintă $34\% - 24\% = 10\%$ din sumă. Suma totală este $10 \cdot 24 = 240$ lei.	1p
	Cel mai mare dintre frați a primit $\frac{34 \cdot 240}{100} = 81,6$ lei, cel mijlociu $\frac{24 \cdot 240}{100} = 57,6$ lei, iar cel mai mic $\frac{42 \cdot 240}{100} = 100,8$ lei.	3p

3.)	Din oficiu	1p
a.)	$A_{ABD} = A_{ABE} \Rightarrow \frac{AD \cdot AE}{2} = \frac{BE \cdot AE}{2} \Rightarrow AD = BE.$	1p
	$\triangle ATD \equiv \triangle ETB \Rightarrow AT \equiv TE \Rightarrow \frac{AT}{TE} = 1$, dar $\frac{AM}{MB} = 1$	1p
	$\frac{AT}{TE} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow MT \parallel BE$	1p
	$MT \parallel BE$ și $MN \parallel BC \Rightarrow T \in MN \Rightarrow M, T$ și N sunt puncte coliniare	2p

b.)	$\triangle ATD \equiv \triangle ETB \Rightarrow AT \equiv TE$ și $BT \equiv TD$, deci în patrulaterul ABED diagonalele se înjumătățesc, deci ABED este un paralelogram $\Rightarrow AB \parallel DE$	1p
c.)	$DF \perp BC, A_{EDC} = \frac{EC \cdot DF}{2} = \frac{2AD \cdot AE}{2} = AD \cdot AE$	2p
	$A_{ABED} = AD \cdot AE \Rightarrow A_{DEC} = A_{ABED}$	1p
4.)	Din oficiu	1p
a)	În triunghiul dreptunghic NAO NR este mediană $\Rightarrow NR = AO/2$ (1) În triunghiul dreptunghic MAO MR este mediană $\Rightarrow MR = AO/2$ (2) (1), (2) $\Rightarrow NR = MR$ și $NR + MR = AO$. (3) Din ipoteză $MN = OC$ (4) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow OC = OA$. (5) (3), (4), (5) $\Rightarrow NR + MR = MN \Rightarrow M, N, R$ sunt coliniare	3p
b)	$NR = MR, AR = RO \Rightarrow MONA$ este paralelogram	1p
	$MONA$ este paralelogram, $AO = MN$ (rezultă din (4), (5)) $\Rightarrow MONA$ dreptunghi	1p
	$MONA$ dreptunghi $\Rightarrow m(\angle A) = 90^\circ$	1p
	$ABCD$ paralelogram, $m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ dreptunghi	
	$ABCD$ paralelogram, $AMON$ paralelogram $\Rightarrow MO \parallel BC \parallel AD, NO \parallel DC \parallel AB$ O mijlocul segmentului (DB), $NO \parallel DC \Rightarrow N$ mijlocul lui (AD) (6) O mijlocul segmentului (AC), $OM \parallel BC \Rightarrow M$ mijlocul lui (AB) (7) (6), (7) $\Rightarrow MN$ linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel DB$ (8)	1p
	$PN = PM$ (ipoteză), R mijlocul lui $MN \Rightarrow PR \perp MN$ (9) (8), (9) $\Rightarrow PR \perp DB$	1p
	$PR \perp DB$ și $ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow ABCD$ pătrat	1p