

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

Clasa a IX – a

1.Feladat Az ABC háromszög síkjában felvesszük az M, N és P pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{n+4} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{n+1}{n+4} \cdot \overrightarrow{BA}$, illetve $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{n+2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CB}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Igazold, hogy létezik egy $\alpha > 0$ szám úgy, hogy $\overrightarrow{MB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CM}$;
b) Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ számot úgy, hogy az AM , BN és CP összefutó egyenesek legyenek.

2.Feladat Legyen a, b és c három valós szám, amelyek teljesítik a következő feltételeket $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 56$, és $abc = 48$. Számítsd ki az $ab + ac + bc$ értékét illetve a következő kifejezés értékét

$$E = \frac{1}{ab + c - 11} + \frac{1}{bc + a - 11} + \frac{1}{ca + b - 11}.$$

3.Feladat Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Mutassátok ki, hogy:

- a) ha m és n két azonos paritású természetes szám, akkor

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2};$$

b) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$

4.Feladat Legyen $m, n \in \mathbb{N}^*$ és $(m, n) = 1$.

- a) Mutassátok ki, hogy a következő halmaznak $\left\{ \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \mid k = 1, 2, \dots, n \right\}$ n eleme van;

b) Számítsátok ki az $S = \sum_{k=1}^n \left[\frac{mk}{n} \right]$ összeget.

Megjegyzés. $[x]$ és $\{x\}$ jelöli az x szám egész részét illetve törtrészét

¹Munkaidő 3 óra;

²Minden feladat kötelező;

³Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.