

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

Problema 1. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in M_4(\mathbb{R})$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{dacă } i = j \\ 5, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \quad \text{pentru } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se calculeze A^n , pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem de corectare. Matricea A se scrie $A = 2 \cdot I_4 + 5 \cdot B$, unde $B = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$ cu $b_{ij} = 1$, pentru fiecare $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$(1p)

Cum $B^2 = 4 \cdot B$, inductiv se obține că $B^k = 4^{k-1} \cdot B$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$(2p)

Așadar,

$$A^n = (2I_4 + 5B)^n = 2^n I_4 + \sum_{k=1}^n C_n^k 2^{n-k} 5^k \cdot B^k = 2^n I_4 + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k 2^{n-k} 5^k 4^{k-1} \right) \cdot B \dots\dots\dots (2p)$$

$$= 2^n I_4 + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} 5^k 4^k - 2^n \right) \cdot B = 2^n \cdot I_4 + \frac{1}{4} (22^n - 2^n) \cdot B \dots\dots\dots (2p)$$

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural și mulțimea

$$M = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mid A \neq B \text{ și } AB = A + B\}.$$

a) să se arate că mulțimea M are o infinitate de elemente;

b) să se arate că dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = BA$.

Barem de corectare.

a) De exemplu, $\left(a \cdot I_n, \frac{a}{a-1} \cdot I_n\right) \in M$, pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$(3p)

b) Dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = A + B \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n$, adică matricele $A - I_n$ și $B - I_n$ sunt inversa una celeilalte, de unde rezultă că $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$. De aici se obține că $AB = BA = A + B$(4p)

Problema 3. Să se calculeze:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k!}{b^k}, \text{ unde } a, b \in (0, +\infty); \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Barem de corectare. a) Dacă notăm limita cu $L(a, b)$, atunci din lema Cesaro-Stolz, avem

$$L(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k!}{b^k}}{\frac{n!}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{b^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}} - \frac{n!}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1-a} \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{de unde } L(a, b) = \begin{cases} 0, & a < b \\ 1, & a = b \\ +\infty, & a > b \end{cases} \dots\dots\dots (1p)$$

b) Dacă notăm limita cu L , atunci

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2 \ln(1+x)}{x}} - e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \cdot \frac{e^{\frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x}} - 1}{x} \dots\dots\dots (2p)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x}} - 1}{\frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x^2} \dots\dots\dots (1p)$$

$$= e^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2x+1}\right)}{\frac{x^2}{2x+1}} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) = e^2 \dots\dots\dots (1p)$$

Problema 4. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = \sqrt{2}$ și $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și să i se calculeze limita.

Barem de corectare. Se demonstrează prin inducție că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 2$ (2p)

și că $x_{n+1} > x_n$ (2p)

Așadar, șirul este monoton și mărginit, deci convergent. Dacă notăm limita șirului cu l și trecem la limită în relația de recurență, obținem că $\sqrt{2}^l = l$ (1p)

Din $x_n < 2$ rezultă că $l \leq 2$, și cum singurele soluții ale ecuației $\sqrt{2}^x = x$ sunt $x = 2$ și $x = 4$ (o dreaptă intersectează graficul unei funcții strict convexe în cel mult două puncte), se obține că limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este $l = 2$ (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.