

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 FEBRUARIE 2019
CLASA a VI-a – BAREM

Subiectul 1. Pentru numerele naturale nenule a, b și c considerăm numerele $A = \frac{2004 \cdot a + 2005 \cdot c}{2005 \cdot b + 2004 \cdot c}$,

$$B = \frac{2004 \cdot c + 2005 \cdot b}{2005 \cdot a + 2004 \cdot b} \text{ și } C = \frac{2004 \cdot b + 2005 \cdot a}{2005 \cdot c + 2004 \cdot a}.$$

- a. Calculați $A \cdot B \cdot C$.
- b. Determinați numerele naturale nenule a, b și c știind că numerele A, B și C sunt simultan numere naturale.

Rezolvare:

a. $A \cdot B \cdot C = 1$...2p.

b. numerele A, B și C sunt simultan numere naturale și $A \cdot B \cdot C = 1$, deci $A = B = C = 1$...1p.

$$\frac{2004 \cdot a + 2005 \cdot c}{2005 \cdot b + 2004 \cdot c} = 1 \Rightarrow 2004 \cdot a + 2005 \cdot c = 2005 \cdot b + 2004 \cdot c \Rightarrow c = 2005 \cdot b - 2004 \cdot a \quad \text{...1p.}$$

$$\frac{2004 \cdot c + 2005 \cdot b}{2005 \cdot a + 2004 \cdot b} = 1 \text{ și } c = 2005 \cdot b - 2004 \cdot a \text{ conduce la } a = b \quad \text{...2p.}$$

Se demonstrează că $c = b$ deci $a = b = c \in \mathbb{N}^*$...1p.

Subiectul 2.

Determinați numerele naturale x, y, z , știind că: $x^2 + y^2 + z^2 = 2019$ și $\frac{x}{x+43} = \frac{y}{y+7} = \frac{z}{z+11}$.

Rezolvare:

$$\frac{x}{x+43} = \frac{y}{y+7} = \frac{z}{z+11} \Leftrightarrow \frac{x+43}{x} = \frac{y+7}{y} = \frac{z+11}{z} \Leftrightarrow 1 + \frac{43}{x} = 1 + \frac{7}{y} = 1 + \frac{11}{z} \quad \text{...2p.}$$

$$\frac{43}{x} = \frac{7}{y} = \frac{11}{z} \Leftrightarrow \frac{43^2}{x^2} = \frac{7^2}{y^2} = \frac{11^2}{z^2} = \frac{43^2 + 7^2 + 11^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2019}{2019} = 1 \quad \text{...3p.}$$

deci $x=43, y=7$ și $z=11$...2p.

Subiectul 3. Se consideră unghiul AOB ascuțit și semidreapta $(OC$, semidreapta opusă semidreptei $(OA$. Construim $OD \perp OA$ și $OE \perp OB$ astfel încât punctele D și E sunt de aceeași parte cu B față de dreapta AC . Semidreapta $(OF$ este bisectoarea unghiului AOE .

- a. Demonstrați că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COE$ sunt complementare.
- b. Demonstrați că $(OF$ este bisectoarea unghiului BOD .
- c. Dacă se știe și că măsura unghiului AOB este o treime din măsura unghiului COE , calculați măsura unghiului AOF .

Rezolvare:

- a. $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOE + \angle EOC$ și cum $\angle BOE = 90^\circ$ ($OE \perp OB$), $\angle AOC = 180^\circ$ obținem
 $\angle AOB + \angle EOC = 90^\circ$ deci sunt unghiuri complementare. ... 2p.
- b. $\angle AOB = \angle EOD$ (au aceeași măsură) pentru că sunt complementare cu $\angle BOD$
(OF este bisectoarea unghiului BOD deci $\angle AOF = \angle EOF$
Prin scăderea celor două relații obținem: $\angle BOF = \angle DOF$2p.
- c. $\angle COE = 3 \cdot \angle AOB$ și $\angle AOB + \angle COE = 90^\circ$ deci $4 \cdot \angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOB = 22^\circ 30'$
 $\angle BOD = 90^\circ - \angle AOB$, $\angle BOD = 67^\circ 30'$ și cum (OF este bisectoarea unghiului BOD), obținem
 $\angle BOF = 33^\circ 45'$.
 $\angle AOF = \angle AOB + \angle BOF$, $\angle AOF = 56^\circ 15'$3p.

Subiectul 4. Pe cercul $C(O, r)$, $r = 3\text{cm}$ se consideră punctele B , T și M astfel încât măsura arcului mic $\widehat{BT}$ este de 70° iar segmentul BM este diametru. Tangenta la cerc în punctul T intersectează dreapta BM în punctul A . O paralelă dusă prin punctul B la OT intersectează TM în punctul N și AT în punctul C .

- Realizați desenul.
- Calculați măsurile unghiurilor triunghiului MBN .
- Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Rezolvare:

- a. Realizarea desenului ...2p.
- b. $\widehat{BT} = 70^\circ \Rightarrow \angle BOT = 70^\circ \Rightarrow \angle MOT = 110^\circ$
 OT și OM sunt raze, deci $\triangle OTM$ isoscel, $\angle OMT = \angle OTM = 35^\circ$...1p.
 $BN \parallel OT$ și secanta $MN \Rightarrow \angle BNM = \angle OTM = 35^\circ$
În $\triangle MBN$: $\angle MBN = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$...2p.
- c. AT este tangentă la cerc, deci $OT \perp AT \Rightarrow \angle OTA = 90^\circ$
 $BC \parallel OT$ și secanta $AT \Rightarrow \angle BCA = \angle OTA = 90^\circ$...2p.