
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 8 februarie 2020

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , există $x_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot A$;

(b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$;

(c) Determinați $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y^3 - 3Y^2 = A$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Se cere:

i) Calculați A^n ;

ii) Arătați că există două matrici $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A = B^3 + C^3$.

3. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive, astfel încât $x_{n+1}^3 < 3x_n - 2$. Arătați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați limita sa.

4. Calculați limita $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \dots (1 - \cos^n x)}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.