

(Selectată de prof. Haiduc Sorina, Colegiul Național „Simion Bărnuțiu” Șimleu Silvaniei)

Soluție

Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$, de unde rezultă

$$f_A(x) = x^2 - x + 2, \text{ polinomul caracteristic al matricei } A \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$A^2 - A + 2I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + 2I_2 = A \quad (1) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Din (1) rezultă } \det(A^2 + 2I_2) = \det A = 2 \quad (2) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Folosind (1) rezultă $A^2 + I_2 = A - I_2$, de unde obținem

$$\det(A^2 + I_2) = \det(A - I_2) = f_A(1) = 2 \quad (3) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Dar } \det(A^2 - I_2) = \det(A - I_2) \cdot \det(A + I_2) \text{ și } \det(A + I_2) = f_A(-1) = 4 \quad (4)$$

$$\text{Din (3) și (4) obținem } \det(A^2 - I_2) = 2 \cdot 4 = 8 \quad (5) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Din (2), (3) și (5) obținem } \det(A^2 - I_2) + \det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 2I_2) = 12 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

PROBLEMA 3

Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relația $a_{n+1} + a_{n-1} = \sqrt{2} \cdot a_n$, $n \geq 1$ este periodic (adică, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_{n+k} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

(propus de prof. Opreș Adonia – Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” Zalău)

Soluție

Ecuția recurenței: $t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0$ are rădăcinile nerezale $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 2$
 puncte

$$\text{În acest caz termenul general are forma } a_n = \alpha_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n + \beta_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Aplicând formula lui Moivre, termenul general se scrie:

$$a_n = \alpha_1 \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + \beta_1 \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = (\alpha_1 + \beta_1) \cos \frac{n\pi}{4} + i(\alpha_1 - \beta_1) \sin \frac{n\pi}{4}.$$

.....2 puncte

Deducem că $a_{n+8} = a_n$ deci șirul este periodic..... 1 punct

PROBLEMA 4

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 = b_0 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + b_n$,
 $b_{n+1} = (n^2 + n + 1)a_n + b_n$, $\forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}}$.

(G.M. B-1/2014)

Soluție

Deoarece $b_n = a_{n+1} - a_n$ rezultă

$$a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1} = (n^2 + n + 1)a_n + b_n = (n^2 + n + 1)a_n + a_{n+1} - a_n, \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$

deci $a_{n+2} = 2a_{n+1} + n(n+1)a_n \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$

$a_0 = a_1 = 1$. Arătăm prin inducție $a_n = n!$. Presupunem $a_n = n!$ și $a_{n+1} = (n+1)! \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$

Atunci $a_{n+2} = 2(n+1)! + n(n+1)n!$, de unde $a_{n+2} = (n+2)! \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$

$$b_n = (n+1)! - n! \Rightarrow b_n = n \cdot n! \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} = \frac{1}{n!}, \text{ deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$

Folosind criteriul radicalului pentru șirul $x_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \geq 1$ obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$$