

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a IX-a

Subiectul 1. Fie $ABCDE$ un pentagon convex, $P \in (DE)$, $Q \in (CD)$ astfel încât $\frac{PE}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2$ și fie M, N centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv ABE . Demonstrați că $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Demonstrați că, pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$, avem:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x}\right) \geq 9.$$

Subiectul 3. Demonstrați că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nu pot fi termeni (nu neapărat consecutivi) ai unei aceleiași progresii aritmetice.

Subiectul 4. Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem:

$$\frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.