



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

BAREM

Problema 1 Fie funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1 + \sin x - \cos x}{x + e^{x+2015} + \sin x}$.

Determinați primitiva $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , știind că $F(0) = 1$.

Problema 1 Soluție și barem

$$F(x) = \int \frac{x + e^{x+2015} + \sin x - 1 - e^{x+2015} - \cos x}{x + e^{x+2015} + \sin x} dx + C = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \int \left(1 - \frac{1 - e^{x+2015} - \cos x}{x + e^{x+2015} + \sin x} \right) dx + C = \int \left(1 - \frac{(x + e^{x+2015} + \sin x)'}{x + e^{x+2015} + \sin x} \right) dx + C =$$

$$= x - \ln(x + e^{x+2015} + \sin x) + C \dots\dots\dots 4p$$

Din $F(0) = 1$ rezultă că $C = 2016$. Prin urmare $F(x) = x - \ln(x + e^{x+2015} + \sin x) + 2016 \dots\dots 2p$

Problema 2 Pe intervalul $G_a = (a, +\infty)$ cu $a \in \mathbb{R}$, se definește legea de compoziție

$$*: G_a \times G_a \rightarrow G_a \text{ prin } x * y = xy - ax - ay + a^2 + a.$$

a) Demonstrați că $(G_a, *)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că oricare ar fi numărul real a , grupul $(G_a, *)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulțirea.

c) Calculați $x_*^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2 Soluție și barem

a) Se verifică axiomele grupului.....3p

b) Se arată că funcția $f: G_a \rightarrow G_a$ definită de $f(x) = x - a$ este izomorfism de grupuri.....2p

c) $x * y - a = xy - ax - ay + a^2 + a - a = (x - a) \cdot (y - a)$ pentru orice $x, y \in G_a$1p

Se arată prin inducție că $x_*^n = a + (x - a)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$1p



Problema 3 Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dacă funcțiile $f_k: G \rightarrow G$, $f(x) = x^k, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G, \cdot)$, demonstrați că n este număr prim.

Problema 3 Soluție și barem

Fie p prim cu $p | n$ (există deoarece n este mai mare decât 2). Prin urmare există $x \in G$ astfel încât $\text{ord}(x) = p$ 2p

Dacă $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, din $x^p = e^p$, rezultă că $x = e$, în contradicție cu faptul că $\text{ord}(x) = p$ 3p

Prin urmare $p = n$ și n este număr prim.....2p

Problema 4 Determinați funcțiile derivabile $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

(1) derivata f' este continuă și $0 < f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$;

(2) $f(0) = 0$ și

(3) pentru o primitivă F a funcției f^2 cu $F(0) = 0$, avem $F(1) = \frac{f^3(1)}{3}$.

Problema 4 Soluție și barem

Fie funcția $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = f^2(x) - f'(x)f^2(x)$ și G o primitivă a funcției g cu $G(0) = 0$, $G(x) = F(x) - \frac{1}{3}f^3(x)$ 2p

Se verifică faptul că funcția G este crescătoare pe intervalul $[0, 1]$ 1p

Din relația $0 = F(1) - \frac{1}{3}f^3(1) \geq F(x) - \frac{1}{3}f^3(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ rezultă că $F(x) = \frac{1}{3}f^3(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$ 2p

Deoarece $f(x) > 0, x \neq 0$ rezultă că $f^2(x) = f'(x) \cdot f^2(x) \Rightarrow f'(x) = 1, \forall x \in (0, 1]$1p

Prin urmare $f(x) = x + c$, iar din condiția (2) rezultă că $c = 0$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.