

Olimpiada de matematică 16 martie 2020

Barem
Clasa a VII a

a) Să se rezolve următoarea ecuație în mulțimea numerelor raționale:

$$10 - ||2x - 3| - 7| = 5$$

Soluție: $||2x - 3| - 7| = 5$

$$|2x - 3| - 7 = 5 \text{ sau } |2x - 3| - 7 = -5$$

Caz I: 1p

$$|2x - 3| - 7 = 5 \Rightarrow |2x - 3| = 12 \Rightarrow \text{avem 2 cazuri: } 2x - 3 = 12 \text{ sau } 2x - 3 = -12$$

Caz II: 1p

$$|2x - 3| - 7 = -5 \Rightarrow |2x - 3| = 2 \Rightarrow \text{avem 2 cazuri: } 2x - 3 = 2 \text{ sau } 2x - 3 = -2$$

$$\left\{\frac{15}{2}, \frac{-9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\} \text{-soluții rationale}$$

In Z ecuatia nu are solutii..... 1 p

b) Să se verifice dacă este adevărată următoarea inegalitate:

$$0 < \frac{1}{4 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{2014 \cdot 2019} < \frac{1}{2}$$

Soluție:

$$0 < \frac{1}{4 \cdot 9} = \frac{1}{5} \cdot \frac{9 - 4}{4 \cdot 9}$$

$$0 < \frac{1}{9 \cdot 14} = \frac{1}{5} \cdot \frac{14 - 9}{9 \cdot 14}$$

.....

$$0 < \frac{1}{2014 \cdot 2019} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2019 - 2014}{2014 \cdot 2019}$$

..... 1p

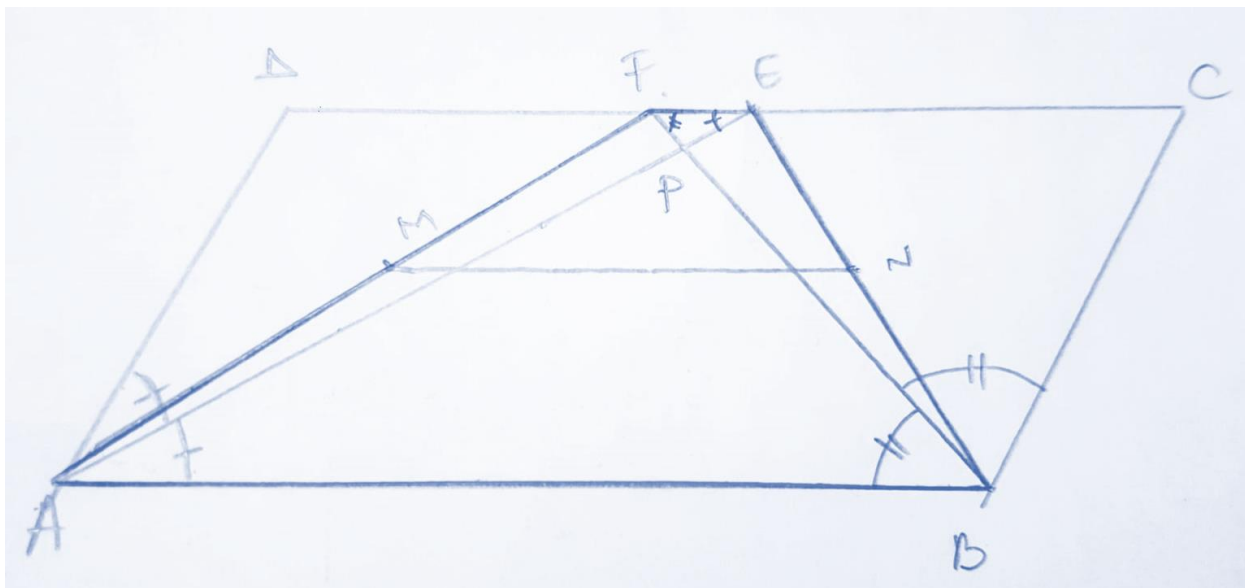
$$\frac{1}{5} \cdot \frac{9 - 4}{4 \cdot 9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{14 - 9}{9 \cdot 14} + \dots + \frac{1}{5} \cdot \frac{2019 - 2014}{2014 \cdot 2019} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{9}{4 \cdot 9} - \frac{4}{4 \cdot 9} + \frac{14}{9 \cdot 14} - \frac{9}{9 \cdot 14} + \dots + \frac{2019}{2014 \cdot 2019} - \frac{2014}{2014 \cdot 2019} \right) = \dots \quad 2p$$

Prin simplificare și reducerea termenilor asemenea:

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2019} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2019}{4 \cdot 2019} - \frac{4}{4 \cdot 2019} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2015}{4 \cdot 2019} < \frac{1}{2} \quad 1p$$

2.



a) $[AE \text{ bisectoare}] \Rightarrow \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EAB$

$[BF \text{ bisectoare}] \Rightarrow \sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle CBF$

Fie $AE \cap BF = \{P\}$.

Din $AB \parallel CD$, secantă $AE \Rightarrow \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle AED$ (1)

Din $AB \parallel CD$, secantă $BF \Rightarrow \sphericalangle FBA \equiv \sphericalangle BFC$ (2) 1 p

Dar $m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle ABC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EAB) + m(\sphericalangle FBA) = 90^\circ$ (unghiuri complementare) (3) 1 p

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow m(\sphericalangle PFE) + m(\sphericalangle PEF) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle FPE) = 90^\circ \Rightarrow \triangle FPE$ este dreptunghic 1 p

b) Din $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle AED \Rightarrow \triangle ADE$ isoscel $\Rightarrow [AD] \equiv [DE]$ (4)

Analog $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle BFC \Rightarrow \triangle FBC$ isoscel $\Rightarrow [FC] \equiv [CB]$ (5)

Din (4) și (5) $[AD] \equiv [DE] \equiv [FC] \equiv [CB]$ 1 p

c) $\left. \begin{array}{l} [AM] \equiv [MF] \\ [BN] \equiv [NE] \end{array} \right\} \Rightarrow MN \text{ linie mijlocie în trapezul } ABEF$ 1 p
 $ABEF \text{ trapez}$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} MN = \frac{AB+EF}{2} \\ [AB] \equiv [CD] \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \frac{DF+FE+EC+FE}{2} = \frac{DE+CF}{2} = \frac{2DE}{2} = DE$ 1 p

Deci $\left. \begin{array}{l} [MN] \equiv [DE] \\ \text{Din a) avem } [DE] \equiv [AD] \end{array} \right\} \Rightarrow [MN] \equiv [AD]$ 1 p

3. Rezolvare

$$\frac{2x+1}{2} + \frac{2x+2}{3} + \frac{2x+3}{4} + \dots + \frac{2x+2019}{2020} = 2x + 2x + 2x + \dots + 2x \quad 2P$$

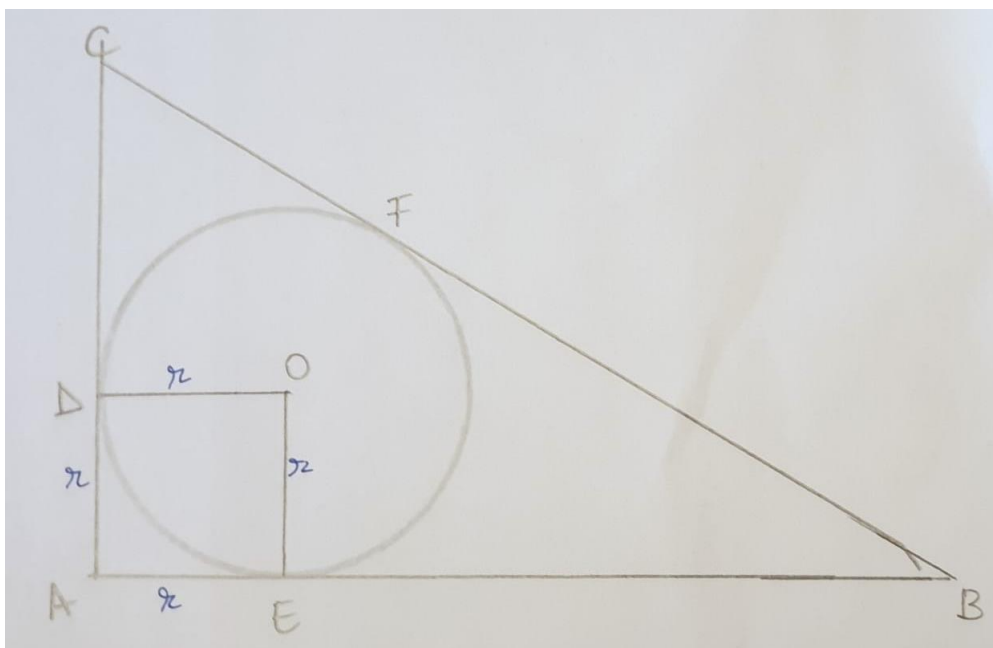
$$\frac{2x+1}{2} - 2x + \frac{2x+2}{3} - 2x + \dots + \frac{2x+2019}{2020} - 2x = 0 \quad 2P$$

$$\frac{1-2x}{2} + \frac{2-4x}{3} + \frac{3-6x}{4} + \dots + \frac{2019-4038x}{2020} = 0 \quad 1p$$

$$(1-2x)\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2019}{2020}\right) = 0 \quad 1p$$

$$1-2x = 0, x = \frac{1}{2} \quad 1p$$

4. Rezolvare



Fie O centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ dreptunghic.

D, E, F punctele de intersecție dintre cerc și laturile triunghiului.

r – lungimea razei: $r = OD = OE$1 p

Dar $DA = OE = r \Rightarrow CD = AC - r$ 1 p

CD și CF tangente la cerc $\Rightarrow CD = CF = AC - r$ (1)

Analog $BE = AB - r$ 1 p

Dar $BE = BF$ (tangente duse din același punct la cerc) $\Rightarrow BE = BF = AB - r$ (2) ...1 p

Din (1) și (2) $\Rightarrow BC = CF + FB \Rightarrow BC = (AC - r) + (AB - r) = AC + AB - 2r =$

$AB + AC - d$ 2 p

$\Rightarrow BC = AB + AC - d \Rightarrow d = AB + AC - BC$ 1 p