

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a V-a

1. Se consideră pătratul perfect $\overline{ab}$.

a) (3p) Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de trei cifre care, prin împărțirea la $\overline{ab}$ dau restul 75.

b) (4p) Calculați suma numerelor naturale de trei cifre care, prin împărțirea la $\overline{ab}$ dau restul 75.

prof. Mariana Nicuță

Soluție:

a) $x : \overline{ab} = c$ (rest 75) $\Rightarrow \overline{ab} > 75$, dar $\overline{ab}$ este pătrat perfect, deci $\overline{ab} = 81 \Rightarrow x = 81c + 75$.

$c = 1 \Rightarrow x = 156$ (valoarea cea mai mică); $c = 11 \Rightarrow x = 966$ (valoarea cea mai mare)

b) Există 11 numere care dau restul 75 prin împărțirea la 81. Acestea sunt: $81 \cdot 1 + 75 = 156$; $81 \cdot 2 + 75 = 237$; ; $81 \cdot 11 + 75 = 966$

Suma acestor numere este: $S = 81 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 11) + 75 \cdot 11 = 6171$.

Barem:

a) $x : \overline{ab} = c$ (rest 75) $\Rightarrow \overline{ab} > 75$, dar $\overline{ab}$ este pătrat perfect, deci $\overline{ab} = 81 \Rightarrow x = 81c + 75$	1p
$c = 1 \Rightarrow x = 156$ (valoarea cea mai mică)	1p
$c = 11 \Rightarrow x = 966$ (valoarea cea mai mare)	1p
b) Există 11 numere care dau restul 75 prin împărțirea la 81; $81 \cdot 1 + 75 = 156$; $81 \cdot 2 + 75 = 237$; ; $81 \cdot 11 + 75 = 966$	2p
Suma acestor numere este: $S = 81 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 11) + 75 \cdot 11 = 6171$	2p

2. a) (3p) Rezolvați ecuația: $\{[(x+2) : 2016 + 2016] : 2017 + 2017\} : 2018 + 2018 = 2019$.

b) (4p) Un călător parcurge în prima etapă o treime din traseul ales, în a doua etapă trei pătrimi din ce i-a rămas, iar în ultima etapă 10 km. Ce lungime are traseul?

(S:E13.204)

Soluție:

a) Se folosește metoda mersului invers. $\{\dots\} : 2018 = 1$; $\{\dots\} = 2018$; $[\dots] : 2017 = 1$;

$[\dots] = 2017$; $(x+2) : 2016 = 1$; $x+2 = 2016$; $x = 2014$

b) Cei 10 km din ultima etapă reprezintă o pătrime din ce i-a rămas după prima etapă, deci după prima etapă călătorul mai avea de parcurs $4 \cdot 10 = 40$ km. Cum, în prima etapă a parcurs o treime din traseu, cei 40 km reprezintă două treimi din traseu, deci o treime din traseu reprezintă 20 km. Traseul are $3 \cdot 20 = 60$ km.

Barem:

a) $\{\dots\} : 2018 = 1$; $\{\dots\} = 2018$; $[\dots] : 2017 = 1$	1p
$[\dots] = 2017$; $(x+2) : 2016 = 1$	1p
$x+2 = 2016$; $x = 2014$	1p
b) După prima etapă călătorul mai avea de parcurs $4 \cdot 10 = 40$ km	1p
Cei 40 km reprezintă două treimi din traseu	1p
O treime din traseu reprezintă 20 km	1p
Finalizare: traseul are $3 \cdot 20 = 60$ km.	1p

3. a) (3p) Aflați restul împărțirii numărului $A = 2^{n+2} \cdot 7^{n+3} + 5 \cdot 7^{n+1} \cdot 2^{n+4} + 87 \cdot 14^n + 6100$ la 2019, pentru orice n număr natural.

prof. Gabriela Sascău

b) (4p) Dovediți că suma $S = 1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + \dots + 2019^{2019}$ este divizibilă cu 10.

prof. Gheorghe Iacoviță

Soluție:

a) $A = 14^n \cdot 4 \cdot 343 + 14^n \cdot 5 \cdot 7 \cdot 16 + 87 \cdot 14^n + 6100 = 14^n \cdot (1372 + 560 + 87) + 6100 = 14^n \cdot 2019 + 2019 \cdot 3 + 43 = 2019(14^n + 3) + 43$. Deci restul împărțirii este 43.

b) $U(1^{2019}) = 1$; $U(2^{2019}) = 8$; $U(3^{2019}) = 7$; $U(4^{2019}) = 4$; $U(5^{2019}) = 5$; $U(6^{2019}) = 6$; $U(7^{2019}) = 3$; $U(8^{2019}) = 2$; $U(9^{2019}) = 9$; $U(0^{2019}) = 0$;

Deci, $U(U(1^{2019}) + U(2^{2019}) + U(3^{2019}) + U(4^{2019}) + U(5^{2019}) + U(6^{2019}) + U(7^{2019}) + U(8^{2019}) + U(9^{2019}) + U(0^{2019})) = U(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 0) = U(45) = 5$

Cum suma are 2019 termeni, putem sa-i asociem câte 10 și să formăm 201 astfel de grupe, iar ultima grupă va fi formată din suma ultimilor 9 termeni, a cărei ultimă cifră este tot 5 (al 10-lea termen are ultima cifră zero).

Deci, avem $U(S) = U(U(201 \cdot 5) + U(2011^{2019}) + U(2012^{2019}) + U(2013^{2019}) + U(2014^{2019}) + U(2015^{2019}) + U(2016^{2019}) + U(2017^{2019}) + U(2018^{2019}) + U(2019^{2019})) = U(5 + 5) = U(10) = 0$, rezultă că S este divizibilă cu 10.

Barem:

a) $A = 14^n \cdot 4 \cdot 343 + 14^n \cdot 5 \cdot 7 \cdot 16 + 87 \cdot 14^n + 6100 = 14^n \cdot 1372 + 14^n \cdot 560 + 14^n \cdot 87 + 6100$	1p
$A = 14^n \cdot (1372 + 560 + 87) + 6100 = 14^n \cdot 2019 + 2019 \cdot 3 + 43 = 2019(14^n + 3) + 43$	1p
$R = 43$	1p
b) Scrie ultima cifră pentru primele 10 puteri (primii 10 termeni ai sumei)	1p
Calculează corect ultima cifră a sumei primilor 10 termeni: 5	1p
Grupează termenii sumei câte 10, iar ultima grupă are 9 termeni; $U(S) = U(5 + 5) = U(10) = 0$	1p
Finalizare	1p

4. Se consideră numărul $a = \underbrace{111 \dots 11}_{2019 \text{ de } 1} (2)$.

a) (3p) Arătați că $a + 1 = 2^{2019}$.

b) (4p) Demonstrați că $a + 1$ se poate scrie ca suma a patru numere impare consecutive.

(Supliment Gazeta Matematica E11.9/2016, enunț adaptat și modificat prof. Gh. Iacoviță)

Soluție:

a) $a = \underbrace{111 \dots 11}_{2019 \text{ de } 1} (2) \Rightarrow a = 1 \cdot 2^{2018} + 1 \cdot 2^{2017} + 1 \cdot 2^{2016} + \dots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow$

$a = 2^{2018} + 2^{2017} + 2^{2016} + \dots + 2^1 + 1$; înmulțim ultima egalitatea cu 2 și obținem:

$2a = 2^{2019} + 2^{2018} + 2^{2017} + \dots + 2^2 + 2^1$; scăzând, membru cu membru, ultimele două egalități,

avem: $2a - a = 1 \cdot 2^{2019} + 1 \cdot 2^{2018} + 1 \cdot 2^{2017} + \dots + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$

$-1 \cdot 2^{2018} - 1 \cdot 2^{2017} - 1 \cdot 2^{2016} - \dots - 1 \cdot 2^1 - 1 \cdot 2^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2^{2019} - 1 \Rightarrow a + 1 = 2^{2019}$.

b) Considerăm $2k - 3$, $2k - 1$, $2k + 1$, $2k + 3$ cele patru numere impare consecutive a căror sumă

$2^{2019} \Rightarrow (2k - 3) + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3) = 2^{2019} \Rightarrow 8k = 2^{2019} \Rightarrow 2^2 \cdot 2k = 2^{2019} \Rightarrow 2k = 2^{2017}$;

deci $2^{2019} = (2^{2017} - 3) + (2^{2017} - 1) + (2^{2017} + 1) + (2^{2017} + 3)$, adică $a + 1$ poate fi scris ca suma a patru numere impare consecutive.

Barem:

a) Scrie $a = 2^{2018} + 2^{2017} + 2^{2016} + \dots + 2^1 + 1$	1p
Scrie $2a = 2^{2019} + 2^{2018} + 2^{2017} + \dots + 2^2 + 2^1$	1p
Face scăderea și obține $a = 2^{2019} - 1 \Rightarrow a + 1 = 2^{2019}$.	1p
b) Consideră $2k - 3$, $2k - 1$, $2k + 1$, $2k + 3$ cele patru numere impare consecutive a căror sumă este 2^{2019}	1p
$(2k - 3) + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3) = 2^{2019} \Rightarrow 8k = 2^{2019}$	1p
$2^2 \cdot 2k = 2^{2019} \Rightarrow 2k = 2^{2017}$	1p
Finalizare: $a + 1 = 2^{2019} = (2^{2017} - 3) + (2^{2017} - 1) + (2^{2017} + 1) + (2^{2017} + 3)$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.