MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA a X– a

1. Considerăm numerele reale $a, b, x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$ astfel încât $b^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$. Să se arate că $(\log_a b)^n \geq \log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \cdots \cdot \log_a x_n$.

G.M. 11/2012

2. a) Să se arate că $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \frac{n}{n+k-1}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt[n]{2} \cdot (n+2)} + \frac{1}{\sqrt[n]{3} \cdot (n+3)} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot (n+n)} \geq \frac{1}{2}.$$

Mastan Eliza, Longaver Ludovic

3. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 având proprietăţile $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_3| = 5$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

a) Să se calculeze $\frac{9}{z_1} + \frac{16}{z_2} + \frac{25}{z_3}$.

b) Să se calculeze $16z_1^2 + 9z_2^2$.

4. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ care verifică relaţia

$$\sqrt{f(x)} + 3 \cdot f(x) = 4x^2, \forall x \geq 0.$$

a) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x} + 3x = 4x^2$.

b) Să se arate că funcţia $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3x$ este bijectivă.

c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Longaver Ludovic, Liceul Teoretic „Nemeth Laszlo”, Baia Mare.
prof. Muşuroia Nicolae, Colegiul Naţional „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.