OLIMPIADA NAȚIONALĂ
DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

IAȘI
EDIȚIA a XXI-a
24-29 MAI 2024
PROBA ANALIZA DATELOR
CATEGORIA SENIORI 1

SUBIECTUL I. Devierea luminii stelelor de către Soare (8p)

Enunțul problemei:

In această problemă veți lucra cu date similare celor colectate în timpul faimoasei expediții Eddington din 1919, care a oferit unul dintre primele teste experimentale ale Teoriei Relativității Generale. Sarcina voastră va fi să analizați deplasarea luminii stelare cauzate de gravitația Soarelui în timpul unei eclipse și să o comparați cu predicțiile teoretice.

Date

În 1919, Sir Arthur Eddington a efectuat un experiment în timpul unei eclipse solare pentru a testa Teoria Relativității Generale a lui Einstein. Observând pozițiile stelelor din apropierea Soarelui în timpul eclipsei și comparându-le cu pozițiile lor normale, Eddington a oferit dovezi pentru curbarea luminii de către gravitație, la fel cum a prezis și Einstein cu 4 ani înainte. Einstein calculase că devierea unghiulară a razelor de lumină primite de la o stea este dublul valorii calculate din fizica Newtoniană.

Observarea stelelor în timpul unei eclipse solare totale este posibilă în ciuda prezenței Soarelui pe cer deoarece Luna acoperă complet discul luminos al Soarelui, permițând stelelor din apropierea Soarelui să fie vizibile pe cerul întunecat. Eddington a măsurat deviația unghiulară $\Delta\theta$ pentru 7 stele din apropierea discului solar și le-a notat în următorul tabel.

Constante:

$$k = 6.674 \cdot \frac{10^{-11} Nm^2}{kg^2},\ M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30},\ R_{\odot} = 696000km,\ c = 3 \cdot \frac{10^8 m}{s},\ D_{\odot} = 32'.$$

Presupuneri

1. Deplasarea observată ($\Delta\theta$) a poziției unei stele datorată gravitației Soarelui (în arcsecunde) poate fi modelată astfel:

$$\Delta\theta = a/r + b$$

unde r este distanța unghiulară a stelei față de centrul Soarelui în unitățiᵢ de 50 de arcminute.

2. Coordonatele $(x,\ y)$ sunt date în unități de 50 de arcminute (′), iar fotografia cerului poate fi considerată în plan.

Nr.	x (50′)	y (50′)	Δθ (″)
11	-0.504	-1.685	0.2
10	1.342	1.052	0.32
6	-0.573	1.285	0.56
5	-0.978	0.413	0.54
4	0.454	0.597	0.84
2	0.359	-0.556	0.97
3	-0.517	-0.376	1.02

Utilizând datele de mai sus rezolvați următoarele cerințe:

a) Calculați distanța unghiulară (exprimata ca multiplu de 50 de arcminute (′)) și inversul acesteia și adaugați rezultatele într-un tabel. (**1.4p**)

b) Pe hârtie milimetrică reprezentați grafic deviația unghiulară observată în funcție de de inversul distanței unghiulare până la centrul Soarelui. (**2.5p**)

c) Determinați coeficienții $a,\ b$ utilizând metoda celor mai mici pătrate. Adăugați pe graficul de la punctul a) dreapta de cel mai bun fit și dreapta care reprezintă dependența deviației unghiulare de inversul distanței unghiulare a stelei până la centrul Soarelui așa cum este prezis de mecanica Newtoniană. (**2.5p**)

d) Care ar fi devierea unghiulară a unei raze de lumină care trece tangențial pe lângă Soare în arcsecunde? (**0.6p**)

e) Teoria relativității generalizate prezice că deviația unghiulară (Δθ) a unei raze de lumină (în radiani) depinde de distanța față de centrul stelei pe lângă care trece (r), masa stelei (M), viteza luminii (c) și constanta atracției gravitaționale (k). Folosind analiză dimensională, aflați formula de dependență pentru deviația unghiulară. Puteți deduce cum depinde Δθ de r folosind subpunctele anterioare? **(0.5p)**

f) Știind că în această formulă coeficientul de proporționalitate este 4, aflați formula exactă. Folosind valoarea deviației unghiulare pentru o rază tangentă la discul solar calculată în primul subpunct al problemei, aflați care ar fi masa Soarelui (presupunând $R_{\odot}$ fix) și comparați-o cu valoarea corectă.

Totodată, folosiți formula pentru a calcul care este valoarea corectă a deviației unghiulare la marginea discului solar, de data aceasta folosind masa corectă a Soarelui. (**0.5p**)

SUBIECTUL II. Curba de lumină. (8p)

Fluxul de lumină provenit de la diferiți aștri poate varia din numeroase motive. Atunci când observăm un astru pentru o perioadă suficientă de timp, putem identifica uneori un anumit trend periodic al strălucirii, care reiese din curba de lumină (reprezentarea grafică a magnitudinii/strălucirii în funcție de timp).

Vom analiza în continuare curba de lumină a unui asteroid din sistemul Solar, urmărit o lungă perioadă de timp. Asteroidul din acest studiu are două proprietăți speciale: este aproape perfect sferic și prezintă o suprafață omogenă din punct de vedere compozițional. Se cunoaște diametrul asteroidului, $D = 200\ km$. În tabel sunt date momentul observării și magnitudinea în banda V. Asteroidul se mișcă pe o orbită circulară în jurul Soarelui.

a) Trasați curba de lumină a asteroidului reprezentând grafic magnitudinea în funcție de timp. (**3p**)

b) Determinați perioada de rotație a asteroidului în jurul Soarelui și raza orbitei circulare. (**2p**)

c) Determinați albedoul asteroidului. (**2p**)

d) Determinați unghiul de fază al asteroidului la momentul t = 0. (**1p**)

t (zile)	V (mag.)
0	10.12
22	10.5
157	11.86
179	11.94
201	12.0
246	12.03
291	11.96
335	11.77
358	11.63
380	11.45
425	10.94
470	10.22
514	9.66
537	9.73
581	10.4
604	10.76
693	11.7
738	11.92
760	11.99
850	11.98
917	11.67
939	11.5
1006	10.69
1029	10.33

Mag. aparentă în V Soare	$-\ 26.74$
Distanța Pământ – Soare	$1.496\times10^{11}\ m$
1 an sideral, $P_\oplus$	$365.25\ zile$

SUBIECTUL III. Relația masă-luminozitate (9p)

În astronomie există o relație care leagă masa și luminozitatea unei stele. În forma ei generală, se poate scrie ca:

$$\frac{L}{L_\odot} = \alpha \times \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^\beta$$

unde L este luminozitatea stelei, M este masa stelei, $L_\odot$ este luminozitaea Soarelui, $M_\odot$ este masa Soarelui, iar α și β sunt coeficienți care variază în funcție de masa stelei pentru care este aplicată relația. Într-o primă aproximație se poate presupune că acești coeficienți sunt constanți în cadrul unuia dintre cele trei intervale de masă: mase mici, mase intermediare, mase mari.

a) Care este valoarea masei minime posibile pentru o stea? De ce există o astfel de valoare minimă? (**0.5p**)

În tabelul 1 de mai jos sunt date masele și luminozitățile a 22 de stele cu mase mici sau intermediare.

b) Pe foaia cu scară logaritmică primită împreună cu subiectele, marcați punctele corespunzătoare. Această foaie va fi predată la final împreună cu rezolvările. **(3p)**

Tabel 1 Mase și luminozități pentru stele mici și intermediare

Steaua	Masa ($M_\odot$)	Luminozitatea ($L_\odot$)
S1	0,88	61×10^{-2}
S2	3,61	148,55
S3	27,95	$61{,}05 \times 10^{4}$
S4	0,22	72×10^{-4}
S5	0,41	28×10^{-3}
S6	0,17	44×10^{-4}
S7	0,29	$13{,}74 \times 10^{-3}$
S8	14,66	$45{,}5 \times 10^{3}$
S9	32,57	$11{,}3 \times 10^{5}$
S10	7,69	$3{,}49 \times 10^{3}$
S11	21,21	$20{,}25 \times 10^{4}$
S12	0,10	$13{,}10 \times 10^{-4}$
S13	0,25	$93{,}9 \times 10^{-4}$
S14	0,32	$16{,}40 \times 10^{-3}$
S15	0,14	$22{,}23 \times 10^{-4}$
S16	0,55	$54{,}15 \times 10^{-3}$
S17	0,62	$70{,}12 \times 10^{-3}$
S18	42,37	$32{,}5 \times 10^{5}$
S19	1,25	2,40
S20	2,74	56,40
S21	1,89	12,76
S22	1	$99{,}9 \times 10^{-2}$

c) Care sunt stelele de masă mică și care sunt stelele de masă intermediară? Dați răspunsul în funcție de numele lor: litera S urmată de un număr. Justificați răspunsul. (**0.5p**)

d) Determinați valorile coeficienților α și β pentru mase mici, respectiv pentru mase intermediare. (**2p**)

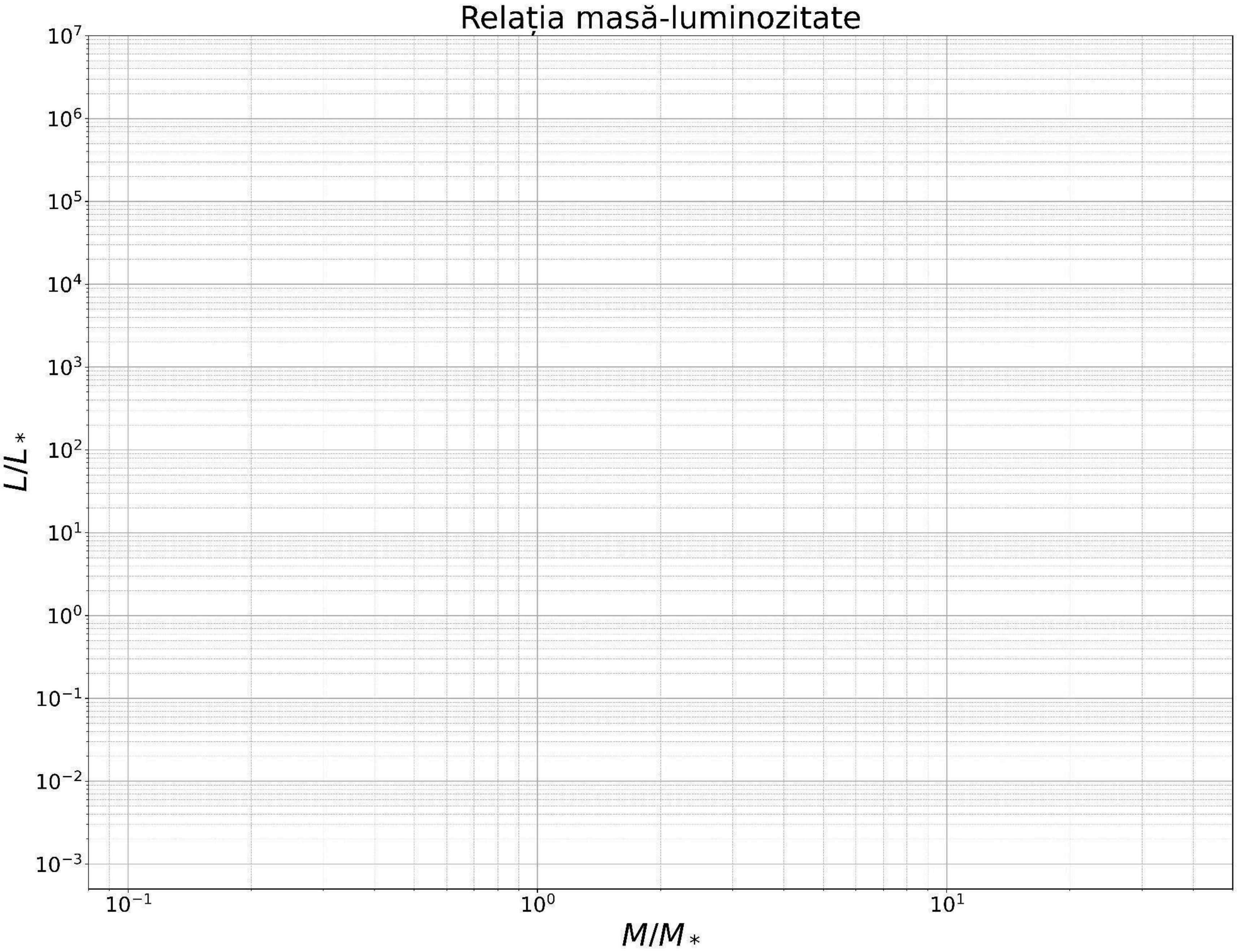
e) Descrieți cum ați fi rezolvat problema dacă în loc de foaia cu scară logaritmică vi s-ar fi dat o simplă hârtie milimetrică. (**0.5p**)

Pentru stelele de mase mari, exponentul β are valoarea 1. În acest caz nu este nevoie de scară logaritmică pentru a determina coeficientul rămas.

f) Folosind datele din Tabelul 2 pentru stele masive, marcați punctele pe hârtia milimetrică primită și determinați valoarea lui α. Hârtia milimetrică va fi predată la final împreună cu rezolvările. (**2.5p)**

Tabel 2. Mase și luminozități pentru stele mari.

Stea	Masa ($M_\odot$)	Luminozitatea ($L_\odot \times 10^6$)
S23	65.23	2.21
S24	74.89	2.63
S25	98.21	3.40
S26	124.58	4.45
S27	109.51	3.95
S28	89.12	3.22
S29	81.81	2.95
S30	116.11	4.16
S31	132.76	4.57
S32	70.12	2.51


Relația masă-luminozitate
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
L/L_*
10^{-1}
10^0
10^1
M/M_*

Anexa 1 – Metoda celor mai mici pătrate

1. Fie dependența liniară $y = ax$ și fie o $\left(y_i, x_i\right)$ $cu\ i\in(1, n)$ o serie de puncte ce aproximează această dreaptă. Coeficientul *a* ce determină dreapta de cel mai bun fit se calculează după relația:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

2. Fie dependența liniară $y = ax + b$ și fie o $\left(y_i, x_i\right)$ $cu\ i\in(1, n)$ o serie de puncte ce aproximează această dreaptă. Coeficienții *a* și *b* ce determină dreapta de cel mai bun fit se calculează după relațiile:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i)$$