OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A V -A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

a) Arătați că numărul $x=\left(3^{1+2+3+...+42}+2\cdot 3^{1+3+5+...+59}\right):29$ este cub perfect.

b) Arătați că numărul x poate să fie scris ca o sumă de patru pătrate perfecte distincte nenule.

Soluție:

a) Avem sumele $1+2+3+...+42=42\cdot 43:2=903$ și $\underbrace{1+3+5+...+59}_{30\ termeni}=(1+59)\cdot 30:2=900$.

Numărul $x=\left(3^{903}+2\cdot 3^{900}\right):29=3^{900}\cdot\left(3^3+2\right):29=3^{900}\cdot(27+2):29=3^{900}=3^{300\cdot 3}=\left(3^{300}\right)^3$.

b) Căutăm o putere a lui 3 care să se scrie ca sumă de patru pătrate perfecte distincte.

Avem $3^4=81=4+16+25+36=2^2+4^2+5^2+6^2$. Cum $3^{900}:3^4=3^{896}=\left(3^{448}\right)^2$ pătrat perfect.

Rezultă că $3^{900}=3^4\cdot 3^{896}=\left(2^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\left(3^{448}\right)^2=\left(2\cdot 3^{448}\right)^2+\left(4\cdot 3^{448}\right)^2+\left(5\cdot 3^{448}\right)^2+\left(6\cdot 3^{448}\right)^2$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Calculează sumele $1+2+3+...+42=903$ și $1+3+5+...+59=900$ ……………..	1p
Determină $x=\left(3^{903}+2\cdot 3^{900}\right):29=3^{900}\cdot\left(3^3+2\right):29=3^{900}\cdot(27+2):29=3^{900}$ ………..	1p
Arată că $x=3^{900}\cdot 3^{300\cdot 3}=\left(3^{300}\right)^3$, cub perfect ……………………………………..	1p
b) $3^4=81=4+16+25+36=2^2+4^2+5^2+6^2$	2p
Arată că $x=\left(2\cdot 3^{448}\right)^2+\left(4\cdot 3^{448}\right)^2+\left(5\cdot 3^{448}\right)^2+\left(6\cdot 3^{448}\right)^2$	2p

Subiectul 2. Împărțind un număr natural la un alt număr natural obținem câtul 3. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este 36.

Soluție:

Fie numărul natural d deîmpărțitul și $î$, un număr natural nenul, împărțitorul. Din teorema împărțirii cu rest avem $d = î \cdot c + r$, cu condiția $r < î$, unde c și r sunt numere naturale. Avem $c = 3$ iar datele din enunț se transpun în următoarea reprezentare grafică:

$$\begin{array}{ll|l} |\overset{î}{\text{----}}| & \text{împărțitorul} & \\ & & 36 \\ |\overset{î}{\text{----}}|\overset{î}{\text{----}}|\overset{î}{\text{----}}|\overset{r}{\text{--}}| & \text{deîmpărțitul} & \end{array}$$

Deoarece $4 \cdot î + r = 36$, restul trebuie să fie un număr natural care se împarte exact la 4.

- Dacă $r = 0$, avem $4 \cdot î = 36 \,|:4 \Rightarrow î = 9$ și, ținând cont că îndeplinește condiția $r < î$, avem $d = 3 \cdot 9 + 0 = 27$.
- Dacă $r = 4$, avem $4 \cdot î + 4 = 36 \,|:4 \Rightarrow î + 1 = 9 \Rightarrow î = 8$ și, ținând cont că îndeplinește condiția $r < î$, avem $d = 3 \cdot 8 + 4 = 28$.
- Dacă $r = 8$, avem $4 \cdot î + 8 = 36 \,|:4 \Rightarrow î + 2 = 9 \Rightarrow î = 7$ nu îndeplinește condiția $r < î$ și, în consecință nu avem soluții.
- Dacă $r > 8$, cu atât mai mult condiția $r < î$ nu este îndeplinită.

În concluzie problema admite două soluții:

$d = 27,\ î = 9,\ c = 3$ iar $r = 0$ și $d = 28,\ î = 8,\ c = 3$ iar $r = 4$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Scrie teorema împărțirii cu rest $d = î \cdot c + r$, cu condiția $r < î$, unde d deîmpărțitul, $î$ un număr natural nenul, împărțitorul, c și r sunt numere naturale	1p
Deduce relația $4 \cdot î + r = 36$ și observă că restul trebuie să fie un număr natural care se împarte exact la 4	2p
Dacă $r = 0$ obține $î = 9$ și $d = 27$ …………………………………………………...	1p
Dacă $r = 4$ obține $î = 8$ și $d = 28$ …………………………………………………...	1p
Dacă $r = 8$ obține $î = 7$ și precizează că nu îndeplinește condiția $r < î$ și, în consecință nu avem soluții	1p
Dacă $r > 8$, cu atât mai mult condiția $r < î$ nu este îndeplinită și problema admite două soluții: $d = 27,\ î = 9,\ c = 3$ iar $r = 0$ și $d = 28,\ î = 8,\ c = 3$ iar $r = 4$	1p

Subiectul 3. Pe o masă sunt 9 cartonaşe. Pe fiecare cartonaş este scris unul dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 astfel încât nu există două cartonașe cu același număr. Gigel și Costel iau fiecare câte 4 dintre cele 9 cartonașe. Aflați ce număr este pe cartonașul rămas pe masă, știind că suma numerelor de pe cartonașele luate de Gigel, este de 5 ori mai mare decât suma numerelor de pe cartonașele luate de Costel.

Soluție:

Suma tuturor numerelor este $1+2+3+4+5+11+12+13+14=65$. Dacă c este suma numerelor de pe cartonașul lui Costel, $5\cdot c$ suma numerelor de pe cartonașul lui Gigel și x este numărul de pe cartonașul rămas pe masă atunci avem $c+5\cdot c+x=65 \Leftrightarrow 6\cdot c+x=65$. Cum $65=6\cdot 10+5$ avem $c\leq 10$.

Pentru $c=10$ avem $x=5$ și cum $1+2+3+4=10$ constatăm că Costel a extras cartonașele cu numerele 1, 2, 3, 4. Cum $5\cdot c=50=11+12+13+14$ avem că Gigel a extras cartonașele cu numerele 11, 12, 13, 14. În acest caz numărul de pe cartonașul rămas pe masă este 5.

Pentru $c=9$ avem $6\cdot 9+x=65$ de unde obținem $x=11$. În acest caz problema nu are soluții.

Pentru $c<9$ avem $x=65-6\cdot c\geq 65-6\cdot 8=17$ de unde obținem $x\geq 17$ și cum $x\leq 14$ deducem că problema nu are soluții în acest caz.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Calculează suma tuturor numerelor $1+2+3+4+5+11+12+13+14=65$ …………....	1p
Notează c suma numerelor de pe cartonașul lui Costel, $5\cdot c$ suma numerelor de pe cartonașul lui Gigel și x numărul de pe cartonașul rămas pe masă …………………....	1p
Deduce egalitatea $6\cdot c+x=65$ și precizează că $65=6\cdot 10+5$ de unde avem $c\leq 10$ …	1p
Pentru $c=10$ avem $x=5$ și cum $1+2+3+4=10$ constatăm că Costel a extras cartonașele cu numerele 1, 2, 3, 4. Cum $5\cdot c=50=11+12+13+14$ avem că Gigel a extras cartonașele cu numerele 11, 12, 13, 14. În acest caz numărul de pe cartonașul rămas pe masă este 5 ………………………………………………………………	3p
Precizează că pentru $c=9$ avem $6\cdot 9+x=65$ de unde obținem $x=11$ și în acest caz problema nu are soluții iar pentru $c<9$ avem $x=65-6\cdot c\geq 65-6\cdot 8=17$ de unde obținem $x\geq 17$ și cum $x\leq 14$ deduce că problema nu are soluții nici în acest caz …..	1p

Subiectul 4. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care numărul $A=\overline{ab}+2\cdot\overline{ba}+3a+4b$ este pătrat perfect.

Soluție: Folosind scrierea zecimală obținem

$$A=10\cdot a+b+2\cdot(10\cdot b+a)+3a+4b=15\cdot a+25\cdot b=5\cdot(3\cdot a+5\cdot b).$$

De aici deducem că A este divizibil cu 5, iar pentru ca A să fie pătrat perfect trebuie ca $3\cdot a+5\cdot b$ să se divide cu 5. Cum $5\cdot b$ este divizibil cu 5 deducem că $3\cdot a$ trebuie să se dividă cu 5, adică a se divide cu 5, a cifră nenulă, prin urmare $a=5$.

Atunci $A=15\cdot 5+25\cdot b=75+25\cdot b=25\cdot(3+b)=5^2\cdot(3+b)$. Pentru ca A să fie pătrat perfect trebuie ca $3+b$ să fie pătrat perfect. Cum $3+b\le 3+9$ și $3+b$ să fie pătrat perfect avem următoarele posibilități:

1) $3+b=4\Rightarrow b=4-3=1$
2) $3+b=9\Rightarrow b=9-3=6$

Numerele căutate sunt 51 și 56.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Folosind scrierea zecimală obține $A=5\cdot(3\cdot a+5\cdot b)$	1p
Observă că A este divizibil cu 5, iar pentru ca A să fie pătrat perfect deduce că $3\cdot a+5\cdot b$ este divizibil cu 5	1p
Argumentează că $a=5$	1p
Pentru $a=5$ obține $A=5^2\cdot(3+b)$ și precizează că $3+b$ este pătrat perfect	1p
Cum $3+b\le 3+9$ deduce că $b=1$ sau $b=6$	2p
Numerele căutate sunt 51 și 56	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A VI -A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. a) Aflați numerele $\overline{xyz}$ astfel încât $x + y + z = \frac{144}{\overline{xy}}$.

b) Aflați numerele naturale x și y astfel încât $x \cdot y = 2019 + y - 2x$.

Soluție:

a) $\overline{xy} \mid 144 \Rightarrow \overline{xy} \in \{12;16;18; 24; 36; 48;72\}$

(i) $\overline{xy} = 12 \Rightarrow z = 12 - 3 = 9 \Rightarrow \overline{xyz} = 129$

(ii) $\overline{xy} = 16 \Rightarrow z = 9 - 7 = 2 \Rightarrow \overline{xyz} = 162$

(iii) $\overline{xy} = 18 \Rightarrow z = 8 - 9 \notin \mathbb{N}$

(iv) $\overline{xy} = 24 \Rightarrow z = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \overline{xyz} = 240$

(v) $\overline{xy} = 36 \Rightarrow z = 4 - 9 \notin \mathbb{N}$

(vi) $\overline{xy} = 48 \Rightarrow z = 3 - 12 \notin \mathbb{N}$

(vii) $\overline{xy} = 72 \Rightarrow z = 2 - 9 \notin \mathbb{N}$

b) $x \cdot y + 2x - y = 2019$; $x \cdot y + 2x - y - 2 = 2017$

$y(x-1) + 2(x-1) = 2017$; $(x-1)(y+2) = 2017$

2017 este număr prim $\Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$y + 2 = 2017 \Rightarrow y = 2015$

sau

$x - 1 = 2017$

$y + 2 = 1 \Rightarrow y \notin \mathbb{N}$ nu convine

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\overline{xy} = 12 \Rightarrow z = 12 - 3 = 9 \Rightarrow \overline{xyz} = 129$	1p
$\overline{xy} = 16 \Rightarrow z = 9 - 7 = 2 \Rightarrow \overline{xyz} = 162$	1p
$\overline{xy} = 24 \Rightarrow z = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \overline{xyz} = 240$	1p
Discutarea cazurilor care nu au soluție	1p
b) $x \cdot y + 2x - y - 2 = 2017$	1p
$(x-1)(y+2) = 2017$	1p
Finalizare	1p

Subiectul 2. Determinați numerele prime p astfel încât $p^2 + 3^p + 1 = 37^{4^a}$, unde a este număr natural dat.

Soluție:

$p^2 + 3^p + 1 = 37^{4^a}$
$3^p + 1$ = nr. par
37^{4^a} = nr. impar ⇒ p^2 = nr. impar ⇒ p = nr. impar ⇒ p > 2
$a = 0 \Rightarrow p^2 + 3^p + 1 = 37^1 = 37 \Rightarrow p^2 + 3^p = 36$

$$\left.\begin{matrix} p > 2 \\ 3^p < 36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3^p = 27 \Rightarrow p = 3$$

9 + 27 = 36 adevărat, deci p = 3 este soluție

a > 0 ⇒ $u_c(37^{4^a}) = 1$
⇓
$u_c(p^2 + 3^p + 1) = 1 \Rightarrow u_c(p^2 + 3^p) = 0$
p fiind nr. impar atunci $u_c(p^2) \in \{1;5;9\}$ și $u_c(3^p) \in \{3;7\}$
rezultă $u_c(p^2 + 3^p) \neq 0$, deci problema nu are alte soluții

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
37^{4^a} = nr. impar ⇒ p^2 = nr. impar ⇒ p = nr. impar ⇒ p > 2	1p
$a = 0 \Rightarrow p^2 + 3^p + 1 = 37^1 = 37 \Rightarrow p^2 + 3^p = 36$	1p
p =3 este soluție	1p
a > 0 ⇒ $u_c(37^{4^a}) = 1$	1p
$u_c(p^2 + 3^p + 1) = 1 \Rightarrow u_c(p^2 + 3^p) = 0$	1p
p fiind nr. impar atunci $u_c(p^2) \in \{1;5;9\}$ și $u_c(3^p) \in \{3;7\}$	1p
rezultă $u_c(p^2 + 3^p) \neq 0$, deci problema nu are alte soluții	1p

Subiectul 3. Fie $A_0, A_1, \ldots, A_n$ puncte situate în această ordine pe o dreaptă d astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 2^2$, …, $A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$.

a) Arătați că $A_0A_{2018} = 2^{2018} - 1$.
b) Aflați p astfel încât $A_0A_p = 1023$.
c) Dacă M este mijlocul lui A_2A_{12} și N este mijlocul lui $A_{12}A_{24}$, determinați MN.

Soluție:

a) $A_0A_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
$A_0A_{2018} = 2^{2018} - 1$

b) $A_0A_p = 2^p - 1 = 1023 \Rightarrow 2^p = 1024 \Rightarrow p = 10$

c) $MN = MA_{12} + A_{12}N$
$= \frac{A_2A_{12}}{2} + \frac{A_{12}A_{24}}{2} = \frac{A_2A_{24}}{2}$
$= \frac{A_0A_{24} - A_0A_2}{2}$
$= \frac{(2^{24}-1)-(2^2-1)}{2} = \frac{2^{24}-2^2}{2} = 2^{23} - 2$

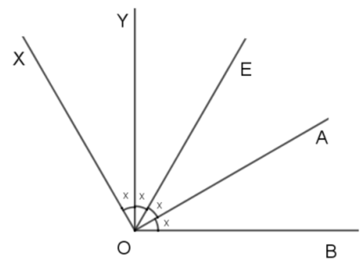
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$A_0A_n = 2^n - 1$	1p
$A_0A_{2018} = 2^{2018} - 1$	1p
$A_0A_p = 2^p - 1 = 1023 \Rightarrow 2^p = 1024 \Rightarrow p = 10$	1p
$MN = MA_{12} + A_{12}N$	1p
$= \frac{A_2A_{12}}{2} + \frac{A_{12}A_{24}}{2} = \frac{A_2A_{24}}{2}$	1p
$= \frac{A_0A_{24} - A_0A_2}{2}$	1p
$MN = \frac{(2^{24}-1)-(2^2-1)}{2} = \frac{2^{24}-2^2}{2} = 2^{23} - 2$	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

Subiectul 4. Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle AOB$. În semiplanul determinat de OA care nu conține pe (OB se duc dreptele OX ⊥ OA și OY ⊥ OB. Dacă (OE este bisectoarea $\sphericalangle XOB$, iar (OY este bisectoarea $\sphericalangle XOE$, arătați că (OA este bisectoarea $\sphericalangle BOE$ și aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

Soluție:

$m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle XOY) = 90^o - m(\sphericalangle YOA)$ (1)
(OE bisectoarea $\sphericalangle BOX \Rightarrow$ (OE bisectoarea $\sphericalangle YOA$
$\Rightarrow \sphericalangle YOE \equiv \sphericalangle EOA$ (2)
(OY bisectoarea $\sphericalangle XOE \Rightarrow \sphericalangle YOE \equiv \sphericalangle XOY$ (3)
Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle XOY \equiv \sphericalangle AOB$
$\Rightarrow \sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle AOB \Rightarrow$ (OA bisectoarea $\sphericalangle BOE$
$m(\sphericalangle XOY) = m(\sphericalangle YOE) = m(\sphericalangle EOA) = m(\sphericalangle AOB) = x$
$m(\sphericalangle BOY) = 3x = 90^o \Rightarrow x = 30^o \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 30^o$



Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corectă	1p
$m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle XOY) = 90^o - m(\sphericalangle YOA)$	1p
(OE bisectoarea $\sphericalangle BOX \Rightarrow$ (OE bisectoarea $\sphericalangle YOA$	1p
(OY bisectoarea $\sphericalangle XOE \Rightarrow \sphericalangle YOE \equiv \sphericalangle XOY$	1p
Arată că (OA bisectoarea $\sphericalangle BOE$	1p
$m(\sphericalangle XOY) = m(\sphericalangle YOE) = m(\sphericalangle EOA) = m(\sphericalangle AOB) = x$	1p
$m(\sphericalangle BOY) = 3x = 90^o \Rightarrow x = 30^o \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 30^o$	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –
CLASA A VII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

a) Arătați că numărul $a=2\cdot(1+2+...+2018)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)$ este pătrat perfect.

b) Care este soluția în $\mathbb{Q}$ a ecuației: $\left(\frac{1}{33}+\frac{1}{303}+...+\frac{1}{3\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}3}\right)\cdot x=\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}$.

Soluție:

a) Avem

$$a=2\cdot\frac{2018\cdot 2019}{2}\left(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{2019-2018}{2018\cdot 2019}\right)=$$

$$=2018\cdot 2019\cdot\left(\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}+...+\frac{2019}{2018\cdot 2019}-\frac{2018}{2018\cdot 2019}\right)=$$

$$=2018\cdot 2019\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=2018\cdot 2019\cdot\left(1-\frac{1}{2019}\right)=2018\cdot 2019\cdot\frac{2018}{2019}$$

$$=2018^2$$

b) Ecuația este echivalentă cu $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}\right)\cdot x=\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}$ de unde

prin împărțire la $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}\right)$ obținem $x=3$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Deduce că $a=2\cdot\frac{2018\cdot2019}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)$ ………….………	2p
$a=2018^2$ ………………………………………………………………………..………...	1p
b) Deduce că $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}\right)\cdot x=\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}$ ………….....	2p
Prin împărțire la $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}\right)$ obține $x=3$ …….…………………………….	2p

Subiectul 2. Se consideră numărul $A=\sqrt{\overline{a,b(cd)}+\overline{b,c(da)}+\overline{c,d(ab)}+\overline{d,a(bc)}}$, unde a, b, c, d sunt cifre nenule diferite.

a) Demonstrați că $1\le 0,3\cdot A\le\sqrt{3}$.

b) Câte numere $\overline{abcd}$ sunt dacă $A\in Q$?

Soluție:

a) Avem $\overline{a,b(cd)}=\dfrac{990a+99b+10c+d}{990}$ și analoagele $\overline{b,c(da)}=\dfrac{990b+99c+10d+a}{990}$, $\overline{c,d(ab)}=\dfrac{990c+99d+10a+b}{990}$ respectiv $\overline{d,a(bc)}=\dfrac{990d+99a+10b+c}{990}$.

Numărul A devine $A=\sqrt{\dfrac{1100(a+b+c+d)}{990}}=\sqrt{\dfrac{10(a+b+c+d)}{9}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{10\cdot(a+b+c+d)}$.

Deoarece a, b, c, d sunt cifre nenule şi diferite avem $\min(a+b+c+d)=1+2+3+4=10$ şi $\max(a+b+c+d)=6+7+8+9=30$ rezultă că $\dfrac{1}{3}\sqrt{10\cdot 10}\le A\le\dfrac{1}{3}\sqrt{10\cdot 30}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{10}{3}\le A\le\dfrac{10}{3}\sqrt{3}$.

Înmulțind ultima inegalitate cu $0,3$ obținem $1\le 0,3\cdot A\le\sqrt{3}$.

b) Dacă $A\in Q$ avem $\dfrac{1}{3}\sqrt{10\cdot(a+b+c+d)}\in\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow$ $a+b+c+d=10k^2$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

Dacă $k\ge 2$ avem $a+b+c+d\ge 10\cdot 4>30=\max(a+b+c+d)$, de unde deducem $k=1$.

Pentru $k=1$ avem $a+b+c+d=10\Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ și variantele.

Numerele $\overline{abcd}$ care au prima cifră 1 sunt 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, la fel se procedează pentru prima cifră 2, 3 și 4. Obținem în total $4\cdot 6=24$ numere.

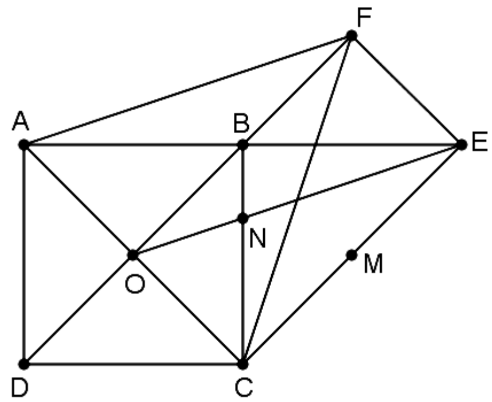
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Arată că $A=\frac{1}{3}\sqrt{10\cdot(a+b+c+d)}$	2p
Argumentează că $\min(a+b+c+d)=10$ și $\max(a+b+c+d)=30$	1p
Deduce că $\frac{1}{3}\sqrt{10\cdot 10}\le A\le\frac{1}{3}\sqrt{10\cdot 30}$ și obține inegalitatea $1\le 0,3\cdot A\le\sqrt{3}$.	1p
b) Dacă $A=\frac{1}{3}\sqrt{10\cdot(a+b+c+d)}\in\mathbb{Q}$ avem $a+b+c+d=10k^2$, unde $k\in\mathbb{N}^*$....	1p
Precizează că pentru $k\ge 2$ avem $a+b+c+d\ge 10\cdot 4>30=\max(a+b+c+d)$.......	1p
Pentru $k=1$ avem $a+b+c+d=10\Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ și variantele de unde numerele $\overline{abcd}$ care au prima cifră 1 sunt 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, la fel se procedează pentru prima cifră 2, 3 și 4. Obține în total $4\cdot 6=24$ numere.	1p

Subiectul 3. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește trapezul $BCEF$ cu $CE \parallel BF$ și $BF = EF$, astfel încât $[AE \cap [DF = \{B\}$. Fie M mijlocul laturii $[CE]$ și N punctul în care paralela prin E la AF intersectează latura $[BC]$.

a) Să se stabilească natura ΔACF.

b) Să se demonstreze că punctele A, M și N sunt coliniare.

Soluție:



a) În pătratul $ABCD$ notând $AC \cap BD = \{O\}$ avem $AO = OC$ respectiv $BO \perp AC$. Cum $[AE \cap [DF = \{B\}$ avem F, B, O coliniare de unde $FO \perp AC$.

În ΔACF avem FO este înălțime și mediană de unde deducem că ΔACF este isoscel cu baza $[AC]$.

b) În ΔBEF avem $BF = FE$ de unde ΔBEF isoscel. Dar $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle FBE) = 45^0$ (unghiuri opuse la vârf) de unde avem că ΔBEF este dreptunghic isoscel cu $m(\sphericalangle BFE) = 90^0$.

Din $EF \perp FD$ și $CO \perp FD \Rightarrow EF \parallel CO$ și cum $OF \parallel EC$ (din trapezul $BCEF$ cu $CE \parallel BF$) rezultă că $EFOC$ paralelogram (dreptunghi) de unde avem că $FE = OC = AO$

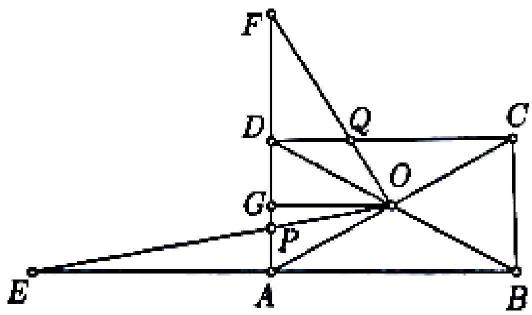
Din $EF \perp FD$ și $AO \perp FD \Rightarrow FE \parallel AO$ și cum $FE = AO$ rezultă că $AOEF$ paralelogram cu $AE \cap OF = \{B\}$ de unde avem AB = BE.

Din $AB = BE$ și $AO = OC$ avem $[CB]$, respectiv $[EO]$ mediane în ΔAEC și cum știm că $EO \cap CB = \{N\}$ avem N este centru de greutate în ΔAEC. Cum M mijlocul laturii $[CE]$ avem $[AM]$ mediană în $\Delta AEC \Longrightarrow N \in [AM] \Longrightarrow A, N, M$ coliniare.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei	1p
a) Notează $AC \cap BD = \{O\}$, deduce că FO este înălțime și mediană în ΔACF și precizează că ΔACF este isoscel cu baza $[AC]$	2p
b) Deduce că ΔBEF este dreptunghic isoscel cu $m(\sphericalangle EFB) = 90^0$....................	1p
Argumentează că $EFOC$ este paralelogram și deduce $FE = OC = AO$	1p
Argumentează că $AOEF$ paralelogram cu $AE \cap OF = \{B\}$ și $AB = BE$..............	1p
Deduce că N este centru de greutate în $\Delta AEC \Longrightarrow A, N, M$ coliniare	1p

Subiectul 4. În dreptunghiul $ABCD$ notăm cu E simetricul punctului B față de punctul A și cu F simetricul punctului A față de punctul D. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, $\{P\} = OE \cap AD$ și $\{Q\} = OF \cap CD$, demonstrați că $\dfrac{QD}{AB} + \dfrac{PD}{BC} = 1$.

Soluție:



Fie $OG \parallel AB, G \in (AD)$. În dreptunghiul $ABCD$ avem $\{O\} = AC \cap BD$ de unde $[BO] \equiv [OD]$ și $AB \parallel CD$ cu $Q \in DC$ (deoarece $\{Q\} = OF \cap CD$) deducem că $OG \parallel DQ$.

Din $OG \parallel AB$ și $[BO] \equiv [OD]$ avem că $[OG]$ este linie mijlocie în ΔDAB de unde avem

$$AG = GD = \frac{1}{2}AD \text{ și } GO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AE.$$

Din $OG \parallel DQ \xRightarrow{TFA} \Delta FQD \sim \Delta FOG$ de unde $\dfrac{FQ}{FO} = \dfrac{QD}{OG} = \dfrac{FD}{FG}$. Cum F simetricul punctului A față de punctul D avem $AD = DF$ și $FG = FD + DG = AD + DG = AD + \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{3}{2}AD$. Avem $\dfrac{QD}{OG} = \dfrac{FD}{FG} = \dfrac{AD}{\frac{3}{2}AD} = \dfrac{2}{3}$ de unde deducem că $\dfrac{QD}{AB} = \dfrac{QD}{2OG} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, (1).

Din $OG \parallel AE \xRightarrow{TFA} \Delta APE \sim \Delta GPO$ de unde $\dfrac{AP}{PG} = \dfrac{PE}{PO} = \dfrac{AE}{GO}$. Cum $\dfrac{AP}{PG} = \dfrac{AE}{GO} = \dfrac{AE}{\frac{1}{2}AE} = \dfrac{2}{1}$ avem că

$$\frac{AP}{AP+PG} = \frac{2}{2+1} \Leftrightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AP}{2AG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AD-AP}{AD} = \frac{3-1}{3} \Leftrightarrow \frac{PD}{BC} = \frac{2}{3}, (2).$$

Din (1) și (2) obținem că $\dfrac{QD}{AB} + \dfrac{PD}{BC} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei	1p
Construiește $OG \parallel AB, G \in (AD)$, deduce că $[OG]$ este linie mijlocie în ΔDAB și obține că $AG = GD = \frac{1}{2}AD$ și $GO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AE$	1p
Din $\Delta FQD \sim \Delta FOG$ deduce că $\frac{QD}{AB} = \frac{1}{3}$, (1)	2p
Din $\Delta APE \sim \Delta GPO$ deduce că $\frac{PD}{BC} = \frac{2}{3}$, (2)	2p
Din (1) și (2) obține că $\frac{QD}{AB} + \frac{PD}{BC} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

a) Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$.

b) Arătați că suma $\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{100\cdot99}\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)}<1.$

Soluție:

a) Se raționalizează cu $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ obținem

$$\frac{^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}1}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(|\underbrace{n+1}_{>0}|-|\underbrace{n}_{>0}|\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}\cdot(n+1-n)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}.$$

b) Aplicăm egalitatea de la punctul a) pentru fiecare termen al sumei obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{3\cdot2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

....

$$\frac{1}{\sqrt{100\cdot99}\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)}=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{99}}-\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}.$$

Prin însumare, membru cu membru, avem

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100\cdot99}\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=0,9<1.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Raționalizează cu $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ și obține $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n^2}\right)}$	1p
Prin calcul obține egalitatea din enunț ……………………………………………	2p
b) Aplică egalitatea de la punctul a) pentru fiecare termen al sumei și prin însumare, membru cu membru, obține $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$ ….	2p
Precizează că suma este egală cu $1-\frac{1}{10}=0,9<1$	2p

Subiectul 2 Să se arate că pentru orice x număr real avem

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x^2+4x+7}<2.$$

Soluție:

Avem $x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ de unde deducem că $\frac{1}{x^2+x+1}\leq\frac{4}{3}$, cu egalitate pentru $x=-\frac{1}{2}$,(1).

Analog avem $x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3\geq 3$ de unde avem $\frac{1}{x^2+2x+4}\leq\frac{1}{3}$, cu egalitate pentru $x=-1$, (2) și $x^2+4x+7=x^2+4x+4+3=(x+2)^2+3\geq 3$ de unde avem $\frac{1}{x^2+4x+7}\leq\frac{1}{3}$, cu egalitate pentru $x=-2$, (3).

Din inegalitățile (1), (2) și (3) adunând membru cu membru și observând că egalitățile nu se pot realiza simultan, obținem inegalitatea din enunț.

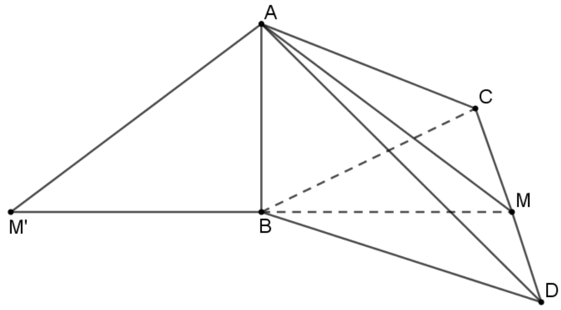
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Agumentează $\frac{1}{x^2+x+1}\leq\frac{4}{3}$, cu egalitate pentru $x=-\frac{1}{2}$, (1)	2p
$\frac{1}{x^2+2x+4}\leq\frac{1}{3}$, cu egalitate pentru $x=-1$, (2)	2p
$\frac{1}{x^2+4x+7}\leq\frac{1}{3}$, cu egalitate pentru $x=-2$, (3)	2p
Adună inegalitățile (1), (2) și (3) și observă că egalitățile nu se pot realiza simultan, obține inegalitatea din enunț.	1p

Subiectul 3. În tetraedrul $ABCD$ cu lungimile muchiilor AB, BC și CA proporționale cu numerele 3, 4 respectiv 5, se construiește M' simetricul lui M față de B, unde $M \in (CD)$. Arătați că $AM = AM'$ dacă și numai dacă $AB \perp (BCD)$.

Soluție:

"$\Rightarrow$" Arătăm că dacă $AM = AM'$ implică $AB \perp (BCD)$.

Din $AM = AM'$ avem $\Delta AMM'$ isoscel. Avem M' simetricul lui M față de B, adică $MB = BM'$ de unde deducem că $[AB]$ mediană în $\Delta AMM'$ isoscel $\Rightarrow AB$ înălțime de unde rezultă $AB \perp MM'$,(1).



Din $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{CA}{5} = a$ avem $AB = 3a$, $BC = 4a$, $CA = 5a$ și aplicând reciproca teoremei lui Pitagora în ΔABC obținem că $CA^2 = AB^2 + BC^2$ de unde deducem că ΔABC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle ABC) = 90^0 \Rightarrow AB \perp BC$,(2).

Din (1) și (2) avem că $\left.\begin{array}{l} AB \perp MM', \ MM' \subset (BCD) \\ AB \perp BC, \ BC \subset (BCD) \\ MM' \cap BC = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCD).$

"$\Leftarrow$" Arătăm că dacă $AB \perp (BCD)$ implică $AM = AM'$.

Din $\left.\begin{array}{l} AB \perp (BCD) \\ MM' \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp MM' \Rightarrow AB$ înălțime în $\Delta AMM'$. Cum $MB = BM'$ avem că $[AB]$ mediană în $\Delta AMM'$ rezultă $\Delta AMM'$ este isoscel de unde avem $AM = AM'$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
"$\Rightarrow$" Deduce că $AB \perp MM'$,(1)	1p
Argumentează că ΔABC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle ABC) = 90^0$ și deduce $AB \perp BC$,(2)	1p
Demonstrează că $AB \perp (BCD)$	1p
"$\Leftarrow$" Argumentează că $AB \perp MM'$	1p
Precizează că AB este înălțime și mediană în $\Delta AMM'$ de unde rezultă că $\Delta AMM'$ este isoscel și deduce că $AM = AM'$	2p

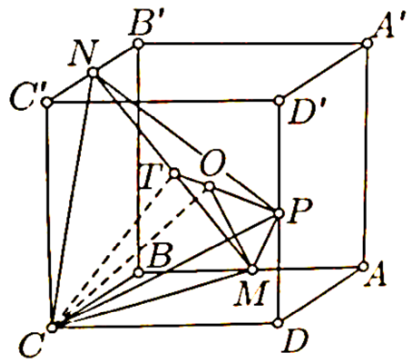
Subiectul 4. În cubul $ABCD\,A'B'C'D'$ notăm M, N, P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[B'C']$ respectiv $[DD']$.

a) Să se demonstreze că $CMNP$ este piramidă triunghiulară regulată.

b) Să se determine sinusul unghiului format de dreapta CM și planul (MNP).

c) Să se determine sinusul unghiului format de planele (MNP) și (MNC).

Soluție:



a) Fie a lungimea muchiei cubului. Din M, N, P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[B'C']$ respectiv $[DD']$ obținem

$$AM = MB = B'N = NC' = DP = PD' = \frac{a}{2}, (1).$$

Cum $ABCD\,A'B'C'D'$ cub avem $m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle NC'C) = m(\sphericalangle PDC) = 90^0$ de unde avem

- $\Delta MBC,\ \Delta NC'C,\ \Delta PDC$ dreptunghice în care

$$\left.\begin{array}{l}[MB] \equiv [NC'] \equiv [PD] \\ [BC] \equiv [CC'] \equiv [CD]\end{array}\right\} \overset{CC}{\Longrightarrow} \Delta MBC \equiv \Delta NC'C \equiv \Delta PDC \Longrightarrow [CM] \equiv [CN] \equiv [CP], (2).$$

- $\Delta B'BM,\ \Delta DAM,\ \Delta CBM,\ \Delta D'C'N$ dreptunghice în care

$$\left.\begin{array}{l}[BB'] \equiv [DA] \equiv [CB] \equiv [D'C'] \\ [BM] \equiv [AM] \equiv [BM] \equiv [C'N]\end{array}\right\} \overset{CC}{\Longrightarrow} \Delta B'BM \equiv \Delta DAM \equiv \Delta CBM \equiv \Delta D'C'N$$

$$\Longrightarrow [B'M] \equiv [DM] \equiv [CM] \equiv [D'N], (3).$$

- $\Delta PDM,\ \Delta NB'M,\ \Delta PD'N$ dreptunghice în care

$$\left.\begin{array}{l}[PD] \equiv [NB'] \equiv [PD'] \\ [DM] \equiv [B'M] \equiv [D'N]\end{array}\right\} \overset{CC}{\Longrightarrow} \Delta PDM \equiv \Delta NB'M \equiv \Delta PD'N \Longrightarrow [PM] \equiv [MN] \equiv [NP]$$

$$\Longrightarrow \Delta MNP \text{ echilateral}, (4).$$

Din relațiile (2) și (4) avem $CMNP$ piramidă triunghiulară regulată.

b) Fie $CO \perp (MNP)$, $O \in (MNP)$. Cum $CMNP$ este piramidă triunghiulară regulată rezultă că O reprezintă centrul de greutate al triunghiului ΔMNP.

$$\left.\begin{array}{l}CO \perp (MNP) \\ MO \subset (MNP)\end{array}\right\} \Rightarrow CO \perp MO \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 90^0 \Rightarrow \Delta COM \text{ dreptunghic.}$$

Avem $m\left(\sphericalangle\left(MC,(MNP)\right)\right)=m\left(\sphericalangle\left(MC,MO\right)\right)=m\left(\sphericalangle CMO\right)$ și în ΔCOM dreptunghic $\sin\left(\sphericalangle CMO\right)=\dfrac{CO}{CM}$,(5).

Obținem astfel $MO=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{MN\sqrt{3}}{2}=\dfrac{MN\sqrt{3}}{3}$.

Aplicând teorema lui Pitagora ΔDAM dreptunghic obținem

$$DM^2=DA^2+AM^2=a^2+\frac{a^2}{4}\Rightarrow DM=\frac{a\sqrt{5}}{2}=CM,(6).$$

Aplicând teorema lui Pitagora în ΔPDM dreptunghic obținem

$$MP^2=PD^2+DM^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2\Rightarrow MP=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Folosind relația $MP=PN=MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow MO=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow MO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,(7).

Aplicând teorema lui Pitagora în ΔCOM dreptunghic obținem

$$CO^2=CM^2-MO^2=\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\Rightarrow CO=\frac{a\sqrt{3}}{2},(8).$$

Din (5), (6) și (8) avem $\sin\left(\sphericalangle COM\right)=\dfrac{CO}{CM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{a\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

c) Fie T mijlocul $[MN]$. Cum ΔMNP este echilateral obținem $PT\perp MN$. În ΔMCN isoscel $(MC=CN)$ avem CT mediană și înălțime$\Rightarrow CT\perp MN$.

$$\left.\begin{array}{l}(MNP)\cap(MNC)=MN\\ PT\perp MN,\ PT\subset(MNP)\\ CT\perp MN,\ CT\subset(MNC)\end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\sphericalangle\left((MNP),(MNC)\right)\right)=m\left(\sphericalangle\left(PT,CT\right)\right)=m\left(\sphericalangle CTP\right)$$

$$PT=h_{\Delta MNP}=\frac{MN\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\cdot a}{4},(10).$$

Cum ΔMNP este echilateral cu centrul de greutate O iar $[PT]$ mediană, rezultă că

$$O\in PT\Rightarrow m\left(\sphericalangle CTP\right)=m\left(\sphericalangle CTO\right)\text{ și } OT=\frac{1}{3}\cdot PT=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cdot a}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4},\ (11).$$

$\left.\begin{array}{l}CO\perp(MNP)\\ TO\subset(MNP)\end{array}\right\}\Rightarrow CO\perp TO\Rightarrow m\left(\sphericalangle COT\right)=90^0\Rightarrow\Delta COT$ dreptunghic de unde avem că $\sin\left(\sphericalangle CTO\right)=\dfrac{CO}{CT}$, (12).

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ΔCTM dreptunghic în T obținem

$$CT^2=CM^2-MT^2=\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{5a^2}{4}-\frac{6a^2}{16}=\frac{14a^2}{16}\Rightarrow CT=\frac{a\sqrt{14}}{4},\ (13).$$

Din (12), (13) şi (8) avem $\sin(\sphericalangle CTO)=\frac{CO}{CT}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{a\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
a) Fie a lungimea muchiei cubului obținem $AM=MB=B'N=NC'=DP=PD'=\frac{a}{2}$ și demonstrează că $[CM]\equiv[CN]\equiv[CP]$	1p
Demonstrează că ΔMNP echilateral și argumentează că $CMNP$ piramidă triunghiulară regulată	1p
b) Argumentează că $m\left(\sphericalangle\left(MC,(MNP)\right)\right)=m\left(\sphericalangle(MC,MO)\right)=m(\sphericalangle CMO)$ și că $\sin(\sphericalangle CMO)=\frac{CO}{CM}$	1p
Deduce $CM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $CO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $\sin(\sphericalangle COM)=\sqrt{\frac{3}{5}}$	1p
c) Alege T mijlocul $[MN]$ și deduce că $m\left(\sphericalangle\left((MNP),(MNC)\right)\right)=m(\sphericalangle CTP)$....	1p
Deduce $CT=\frac{a\sqrt{14}}{4}$ și $\sin(\sphericalangle CTO)=\frac{\sqrt{42}}{7}$	1p