



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iași

14.02.2014

CLASA a VI-a

Problema 1. Se consideră numerele

$$a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1006 \cdot 1007}, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \dots + \frac{1}{2+4+6+8+\dots+2012}$$

$$\text{și } c = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2014^2}.$$

a) Calculați numerele a și b .

b) Demonstrați că $c < \frac{1}{2}$.

Problema 2. Notăm cu $S(n)$, suma tuturor divizorilor naturali ai numărului natural n . Un număr natural n se numește **număr perfect** dacă $S(n) = 2 \cdot n$.

a) Arătați că 6 și 28 sunt **numere perfecte**.

b) Dacă numerele k și $2^k - 1$ sunt simultan numere prime, demonstrați că numărul $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ este **număr perfect**.

Problema 3. Două unghiuri suplimentare au o latură comună, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 60° . Determinați măsurile unghiurilor.

Gazeta matematică nr.10/2013

Problema 4. Pe dreapta d , se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F , în această ordine, astfel încât $[OA] = [AB]$, B este mijlocul lui $[AC]$, C este mijlocul lui $[AD]$, D este mijlocul lui $[BE]$ și E este mijlocul lui $[CF]$.

a) Arătați că segmentele $[OE]$ și $[CD]$ au același mijloc.

b) Demonstrați că $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} > \frac{BF}{AF}$.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.