



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 8 februarie 2025
CLASA a X-a

Problema 1. a) Dacă a, b, c sunt trei numere reale pozitive pentru care $a^{\log_3 10} = 27$, $b^{\log_5 10} = 125$ și $c^{\log_{15} 5} = 225$, calculați

$$a^{(\log_3 10)^2} + b^{(\log_5 10)^2} + c^{(\log_{15} 5)^2}.$$

b) Fie a și n două numere reale strict pozitive astfel încât $\sqrt{\log_a n} = \log_a \sqrt{n}$ și $a \log_a n = \log_a an$. Să se arate că n este de forma $n = \frac{p}{q}$, unde p, q sunt numere naturale prime între ele și să se găsească valoarea expresiei $\sqrt{p} + \sqrt[4]{p^3} \cdot \sqrt{q}$.

Prof. Popescu Luminița

Problema 2. Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$ cu proprietatea că produsul oricăror trei dintre ele este mai mare decât al patrulea. Arătați că $\log_{\frac{bcd}{a}} a + \log_{\frac{acd}{b}} b + \log_{\frac{abd}{c}} c + \log_{\frac{abc}{d}} d \geq 2$

(***)

Problema 3. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe de modul 1 care verifică relația $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} =$

1. Determinați valoarea maximă a expresiei $E = \left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right|$.

(***)

Problema 4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x - y) + f(y) \geq f(x^3 + y^3) + f(x), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Gazeta Matematică Nr.9/2024

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore