

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a XII-a

- 1) Să se calculeze  $\int \frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x + 5\cos x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .  
(\*\*\*)
- 2) Se consideră funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$ , unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a lui  $x$ .  
a) Să se arate că  $f$  admite primitive;  
b) Să se calculeze  $\int f(x) dx$ .  
(\*\*\*)
- 3) Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x * y = xy + 3x + 3y + 6$ .  
a) Să se arate că  $*$  determină pe  $(-3, +\infty)$  o structură de grup abelian;  
b) Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că există  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$  astfel încât  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } k \text{ ori}} = x$ .  
(\*\*\*)
- 4) Fie  $p \geq 3$  un număr prim și  $a$  un element de ordin 2 din grupul  $(\mathbb{Z}_{2p}, +)$ . Să se arate că:  
a) există o mulțime  $H \subset \mathbb{Z}_{2p}$  cu  $p$  elemente, astfel încât suma elementelor mulțimii  $H$  este  $\hat{0}$ , iar  $x - y \neq a$ , oricare ar fi  $x, y \in H$ .  
b) există exact  $2^{p-1}$  submulțimi  $F \subset \mathbb{Z}_{2p}$  care verifică cerința de la a).  
(prelucrare G.M. 10/2013)

Propunător: prof. Marius Mohonea – C.N. “UNIREA”- Focșani

## SUCCESE!

**NOTĂ:** Timp de lucru 3 ore.  
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.