

**MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

**Etapa locală
15 februarie 2015**

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f: Z_9 \rightarrow Z_9, f(x) = x^2$. Să se determine submulțimile nevide A ale lui Z_9 cu proprietatea $f(A) = A$.

Benedict G. Niculescu, București, G. M. nr. 9/2014

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $G = \{X_a \in M_2(\mathbb{R}) / X_a = I_2 + aA, a > -1\}$. Demonstrați că G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor, izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

3. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive, demonstrați că pentru orice primitivă F a sa există $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(c) \cdot \sin F(c) = c^{2015}.$$

Dan Seclăman, Craiova

4. Calculați:

a) $\int \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{\sqrt[3]{t^2+1}};$

b) $\lim_{x \searrow 0} \int_x^1 \frac{dt}{t \sqrt[3]{t^2+1} + \sqrt[3]{t(t^2+1)^2} + \frac{t^2+1}{\sqrt[3]{t}}}.$

Cristian Moanță, Craiova

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).

Timp de lucru: 3 ore