



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a XI-a

1. Fie  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  a.î.  $A^2B = A^2 - B$ .

a) Să se arate că matricea  $I_n - B$  este inversabilă.

b) Să se demonstreze că  $AB = BA$ .

2. a) Să se găsească două matrice pătratice de ordin 2 cu elemente reale cu proprietatea că

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Să se arate că orice două matrice pătratice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea

$$\text{că } A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ nu comută.}$$

G.M.12/2013

3. Fie  $Ln = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) \cdot \ln(e+zx) \cdot \dots \cdot \ln(e+nx) - 1}{x}, n \in \mathbb{N}^*.$

a) Să se calculeze  $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x)^{-1}}{x}, L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) \cdot \ln(e+zx) - 1}{x}$

b) Să se demonstreze că  $Ln = \frac{n(n+1)}{2e}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$

4. Dacă  $a \in (1, \infty), b \in \mathbb{R}$  să se determine funcțiile continue  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f(ax+b)=f(x), (\forall)x \in \mathbb{R}$  și  $f\left(\frac{b}{1-a}\right) = 2014.$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte