

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală 16.02.2020

Clasa a VIII-a

Soluții și barem de corectare

1. a) Determinați numerele reale a, b, c dacă:

$$\sqrt{a^2 + 2a + 5} + \sqrt{b^2 - 4b + 8} + \sqrt{4c^2 - 4c + 5} \leq 6;$$

b) Stabiliți intervalul căruia aparține fiecare dintre numerele reale x, y și z știind că :
 $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2(2x + 3y + 4z).$

Soluție:

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 2a + 5} &= \sqrt{a^2 + 2a + 1 + 4} = \sqrt{(a + 1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{b^2 - 4b + 8} &= \sqrt{b^2 - 4b + 4 + 4} = \sqrt{(b - 2)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{4c^2 - 4c + 5} &= \sqrt{4c^2 - 4c + 1 + 4} = \sqrt{(2c - 1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{(a + 1)^2 + 4} + \sqrt{(b - 2)^2 + 4} + \sqrt{(2c - 1)^2 + 4} &\geq 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots(1p) \\ \dots\dots\dots(1p) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Cum } \sqrt{(a + 1)^2 + 4} + \sqrt{(b - 2)^2 + 4} + \sqrt{(2c - 1)^2 + 4} \leq 6$$

$$\sqrt{(a + 1)^2 + 4} + \sqrt{(b - 2)^2 + 4} + \sqrt{(2c - 1)^2 + 4} = 6 \dots\dots\dots(1p)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a + 1)^2 + 4} = 2, \sqrt{(b - 2)^2 + 4} = 2, \sqrt{(2c - 1)^2 + 4} = 2 \Rightarrow a = -1, b = 2 \text{ și } c = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(1p)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z - 8z + 16 - 25 &= 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 &= 25 \dots\dots\dots(1p) \\ 0 \leq (x - 2)^2 \leq 25 \text{ și } 0 \leq (y - 3)^2 \leq 25 \text{ și } 0 \leq (z - 4)^2 \leq 25 \\ |x - 2| \leq 5 \text{ și } |y - 3| \leq 5 \text{ și } |z - 4| \leq 5 &\dots\dots\dots(1p) \\ -5 \leq x - 2 \leq 5 \text{ și } -5 \leq y - 3 \leq 5 \text{ și } -5 \leq z - 4 \leq 5 &\dots\dots\dots(1p) \\ x \in [-3; 7] \text{ și } y \in [-2; 8] \text{ și } z \in [-1; 9] &\dots\dots\dots(1p) \end{aligned}$$

2) Fie $x, y, z \in \mathbf{R}, x > 0, y > 0$ și $z > 0$. Demonstrați că:

a) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$.

b) $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 8\sqrt{xyz}$. Pentru ce valori ale lui x, y, z are loc egalitatea ?

Soluție:

a) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ (A)(1p+1p+1p = 3p)

b) De la a) $\Rightarrow x + 1 \geq 2\sqrt{x}$
 $y + 1 \geq 2\sqrt{y}$
 $z + 1 \geq 2\sqrt{z}$ (1p)

$(x+1)(y+1)(z+1) \geq 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} \cdot 2\sqrt{z} = 8\sqrt{xyz}$ (1p)

Cum $x + 1 \geq 2\sqrt{x}, y + 1 \geq 2\sqrt{y}$ și $z + 1 \geq 2\sqrt{z}; x, y, z > 0 \Rightarrow$ egalitatea de la b) se va obține dacă $x + 1 = 2\sqrt{x}$ și $y + 1 = 2\sqrt{y}$ și $z + 1 = 2\sqrt{z}$ (1p)

$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0, (\sqrt{y} - 1)^2 = 0, (\sqrt{z} - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 1$ (1p)

3. ABCD este un tetraedru și G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC respectiv DAB.

a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.

b) Calculați raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și ABC.

Soluție:

a) Fie M, N, P , mijloacele laturilor $[BC], [AB]$ respectiv $[AC]$

G_1, G_2, G_3 , centre de greutate $\Rightarrow \frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DP} = \frac{DG_3}{DN} = \frac{2}{3}$ (2p)

$\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DP} = \frac{DG_3}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel PM$ și $G_1G_3 \parallel MN \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$ (2p)

b) $\frac{A_{MNP}}{A_{ABC}} = \frac{1}{4}$ (1p)

$\frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{MNP}} = \frac{4}{9}$ (1p)

$\frac{A_{G_1G_2G_3}}{A_{ABC}} = \frac{A_{G_1G_2G_3}}{4A_{MNP}} = \frac{1}{9}$ (1p)

4. $ABCD$ este un paralelogram cu $m(\angle A) = 60^\circ$, $AD = 6\text{cm}$, $DB \perp AD$ și M este mijlocul laturii $[AB]$. În punctul P , $DB \cap CM = \{P\}$, se ridică perpendiculara PQ pe planul paralelogramului $ABCD$, astfel încât $PQ = 2\sqrt{6}\text{cm}$.

a) Aflați aria paralelogramului $ABCD$.

b) Calculați distanțele de la punctul Q la punctul C , respectiv la dreapta BC .

Soluție:

a) $\triangle ADB$ dr $\Rightarrow AB = 12\text{cm}$(1p)

$A_{ABCD} = 6 \cdot 12 \cdot \sin 60 = 36\sqrt{3}\text{cm}^2$(1p)

b) Se arată că $PB = \frac{DB}{3} = 2\sqrt{3}\text{cm}$(1p)

$\triangle CPB$ dr $\Rightarrow CP = 4\sqrt{3}\text{cm}$(1p) $d(Q, C) =$
 $QC = 6\sqrt{2}\text{cm}$(1p)

Din T3 $\perp$ deducem că $QB \perp BC$, deci $d(Q, BC) = QB = 6\text{cm}$(2p)

