Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, 8 Aprilie 2014

CLASA a X–a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Pentru fiecare număr natural k notăm cu $a(k,n)$ numărul divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \le d^2 \le n^2$. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a(k,n)$.

Soluţie. [1]Pentru $1 \le k \le n^2$, fie $A(k,n)$ mulţimea divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \le d^2 \le n^2$. Un număr natural $d \in \{1,2,\ldots,n\}$ aparţine mulţimilor

$$A(d,n), A(2d,n), \ldots, A(d^2,n)$$

şi numai acestora.

.... **3 puncte**

Prin urmare, contribuţia fiecărui d în suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a(k,n) = \sum_{k=1}^{n^2} |A(k,n)|$ este $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{d \text{ ori}} = d$.

.... **2 puncte**

Aşadar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a(k,n) = \sum_{d=1}^{n} d = n(n+1)/2$.

.... **2 puncte**

Problema 2. Considerăm funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietăţile:

a) $f(1) = 1$,

b) $f(p) = 1 + f(p-1)$ pentru orice număr prim p,

c) $f(p_1p_2\cdots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_n)$ pentru orice numere prime, nu neapărat distincte.

Să se arate că $2^{f(n)} \le n^3 \le 3^{f(n)}$ pentru orice număr natural n, $n \ge 2$.

Soluţie. Cum 2 este număr prim, avem $f(2) = 1 + f(1) = 2$, de unde $2^2 \le 2^3 \le 3^2$. Vom demonstra dubla inegalitate $3\log_3 n \le f(n) \le 3\log_2 n$ prin inducţie după n.

.... **1 punct**

[1]Cerinţa este echivalentă cu dubla numărare a cardinalului mulţimii $S(n) = \{(k,d) \mid d \mid k, k \le d^2 \le n^2, 1 \le k \le n^2\}$.

Fie n un număr natural, $n \geq 3$, şi fie $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ descompunerea sa în factori primi, nu neapărat distincţi.

....**1 punct**

Dacă n nu este prim, i.e. $k \geq 2$, din ipoteza de inducţie avem $f(n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_k) \geq 3\sum_{i=1}^{k} \log_3 p_i = 3\log_3 n$ şi

....**1 punct**

$f(n) \leq 3\sum_{i=1}^{k} \log_2 p_i = 3\log_2 n$.

....**1 punct**

Dacă n este prim, i.e. $k = 1$, atunci $n-1$ este număr par şi $f(n) = 1 + f(n-1) = 1 + f(2\frac{n-1}{2}) = 1 + f(2) + f(\frac{n-1}{2}) = 3 + f(\frac{n-1}{2})$.

....**1 punct**

Atunci $f(n) = 3 + f(\frac{n-1}{2}) \leq 3 + 3\log_2 \frac{n-1}{2} = 3\log_2(n-1) \leq 3\log_2 n$

....**1 punct**

şi $f(n) = 3 + f(\frac{n-1}{2}) \geq 3 + 3\log_3 \frac{n-1}{2} = 3\log_3 \frac{3(n-1)}{2} \geq 3\log_3 n$.

....**1 punct**

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se determine numărul funcţiilor crescătoare $f : A \to A$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice x, $y \in A$.

Soluţie. Observăm că $f(k+1) - f(k) \overset{\text{not}}{=} a_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

....**1 punct**

Mai mult, dacă $a_k \in \{0, 1\}$, atunci $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice x, $y \in A$. [2]

....**1 punct**

Fixând $f(0) = a$ şi $f(n) = b$, avem $b - a = a_1 + \cdots + a_{n-1}$, deci numărul funcţiilor f cu proprietatea cerută este egal cu numărul de alegeri a $b - a$ termeni egali cu 1 în suma $a_1 + \cdots + a_{n-1}$, adică $n(a, b) = C_{n-1}^{b-a}$.

....**2 puncte**

Prin urmare, numărul funcţiilor este $\displaystyle\sum_{0 \leq a \leq b \leq n} n(a, b) = \sum_{0 \leq a \leq b \leq n} C_{n-1}^{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_{n-1}^{k}$.

....**2 puncte**

În total sunt $\sum_{k=0}^{n-1} nC_{n-1}^{k} - \sum_{k=1}^{n-1} kC_{n-1}^{k} = n2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)C_{n-2}^{k-1} = n2^{n-1} - (n-1)2^{n-2} = (n+1)2^{n-2}$ funcţii.

....**1 punct**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, şi fie numerele complexe a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ cu $a_n \neq 0$. Să se arate că sunt echivalente afirmaţiile:

[2] Prin urmare, o funcţie f cu proprietăţie cerute este complet determinată de n–uplul $(f(0), a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in A \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}$ ce respectă condiţia $f(0) + a_1 + \cdots + a_{n-1} \leq n$.

P. $|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0| \le |a_n+a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1,

Q. $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ şi $a_0/a_n \in [0,\infty)$.

Soluţie. Q.$\Longrightarrow$P. Dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ şi $a_0/a_n \in [0,\infty)$, atunci $|a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0| = |a_nz^n + a_0| \le |a_nz^n| + |a_0| = |a_n| + |a_0| = |a_n + a_0|$, pentru orice număr complex z de modul 1.

....**2 puncte**

P.$\Longrightarrow$Q. Fie $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z$, $z \in \mathbb{C}$ şi $w = a_0 + a_n$. Pentru fiecare $\varepsilon \in U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ avem $|a_n + g(\varepsilon) + a_0| \le |a_n + a_0|$, adică $|w + g(\varepsilon)| \le |w|$ sau $|g(\varepsilon)|^2 + w\overline{g(\varepsilon)} + \bar{w}g(\varepsilon) \le 0$.

....**2 puncte**

Cum $\sum_{\varepsilon\in U_n} \varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, avem $\sum_{\varepsilon\in U_n} g(\varepsilon) = 0$,

....**1 punct**

de unde, prin sumare, $\sum_{\varepsilon\in U_n} |g(\varepsilon)|^2 + w\overline{g(\varepsilon)} + \bar{w}g(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in U_n} |g(\varepsilon)|^2 \le 0$, ceea ce implică $g(\varepsilon) = 0$, oricare ar fi $\varepsilon \in U_n$. De aici obţinem $a_k = \frac{1}{n}\sum_{\varepsilon\in U_n} g(\varepsilon)/\varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

....**1 punct**

Obţinem $|a_nz^n + a_0| \le |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1. Notând $c = a_0/a_n$ şi $t = z^n$, avem $|t + c| \le |1 + c|$ pentru orice număr complex t de modul 1. Fie P, M, A punctele din planul complex de afixe t, $-c$, respectiv 1. Atunci $PM \le MA$, oricare ar fi P pe cercul unitate, prin urmare cercul de centru M şi raza MA conţine cercul unitate. Cum cele două cercuri au punctul comun A, deducem că sunt tangente în A, deci M şi O sunt coliniare cu A şi $MA \ge OA = 1$. Deducem că $-c \le 0$, deci $c \in [0,\infty)$.

....**1 punct**