

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A X-A

1.)	Din oficiu	1p
	a) $3^n + 2^n = 9^{\log_2 n} + n^2 \Leftrightarrow 3^{\log_2 2^n} + 2^n = 3^{\log_2 n^2} + n^2$	1p
	Fie $f : N \rightarrow R$, $f(x) = 3^{\log_2 x} + x \Rightarrow$ ecuația de mai sus este echivalentă cu $f(2^n) = f(n^2)$	2p
	Funcția f este strict crescătoare, deci injectivă adică $f(2^n) = f(n^2) \Leftrightarrow 2^n = n^2$	1p
	Soluțiile naturale ecuației sunt $n_1 = 2, n_2 = 4$.	1p
	b) Dacă $x < 0$, atunci fiecare factor din membrul stâng este mai mic decât 2, deci produsul fiind mai mic decât 4, nu poate fi egal cu 900.	1p
	Pentru sumele din paranteze aplicăm inegalitatea mediilor: $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) \geq 2\sqrt{625^x \cdot 5^{\frac{1}{x}}} \cdot 2\sqrt{81^x \cdot 3^{\frac{1}{x}}} = 2 \cdot 25^x \cdot 5^{\frac{1}{2x}} \cdot 2 \cdot 9^x \cdot 3^{\frac{1}{2x}} =$ $= 4 \cdot 5^{2x + \frac{1}{2x}} \cdot 3^{2x + \frac{1}{2x}} = 4 \cdot 15^{2x + \frac{1}{2x}} \geq 4 \cdot 15^2 = 900$	2p
	Avem egalitate atunci și numai atunci, dacă $2x + \frac{1}{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	1p
2.)	Din oficiu	1p
	Din $a_k \in [2, 3]$ pentru $\forall k = \overline{1, n}$, obținem $(a_k - 2)(a_k - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 5a_k - 6 \geq a_k^2 \forall k = \overline{1, n}$	3p
	Aplicând rezultatul de mai sus și inegalitatea mediilor obținem: $\log_{a_1} (5a_2 - 6) + \log_{a_2} (5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_{n-1}} (5a_n - 6) + \log_{a_n} (5a_1 - 6) \geq$ $\geq \log_{a_1} a_2^2 + \log_{a_2} a_3^2 + \dots + \log_{a_{n-1}} a_n^2 + \log_{a_n} a_1^2 =$	3p
	$= 2 \left(\frac{\lg a_2}{\lg a_1} + \frac{\lg a_3}{\lg a_2} + \dots + \frac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}} + \frac{\lg a_1}{\lg a_n} \right) \geq 2n \sqrt{\frac{\lg a_2}{\lg a_1} \cdot \frac{\lg a_3}{\lg a_2} \cdot \dots \cdot \frac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}} \cdot \frac{\lg a_1}{\lg a_n}} = 2n \sqrt{1} = 2n$	3p
3.)	Din oficiu	1p
	a) Înlocuind $f(x)$ în relația $f(f(x)) = 4x$ obținem $f(f(f(x))) = 4f(x)$ pe de altă parte $(f \circ f \circ f)(x) = f(4x)$	2p
	Din cele două relații rezultă că $f(4x) = 4f(x)$ și pentru $x = 0$ se obține $f(0) = 0$.	2p

	b) Din $f(4x) = 4f(x)$, pentru $x = 1, 4, 4^2, \dots, 4^{n-1}$. Rezultă că $f(4^n) = 4^n f(1)$.	2p
	Demonstrația se face prin inducție matematică.	3p
4.)	Din oficiu	1p
	a) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Din $ z = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$	1p
	$\left \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right = 1 \Leftrightarrow \frac{ z^2 + \bar{z}^2 }{ z\bar{z} } = 1 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = 1 \Rightarrow a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$	2p
	Rezolvând sistemul de ecuații $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$ obținem soluțiile: $z = \pm \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i \frac{1}{2}$	2p
	b) Deoarece α și β sunt soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$ $\Rightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \beta^2 - \beta + 1 = 0 \Rightarrow \alpha - 1 = \alpha^2, \beta - 1 = \beta^2$	1p
	Înmulțind ecuațiile cu $\alpha + 1$, respectiv $\beta + 1 \Rightarrow \alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$ de unde obținem: $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016} = (\alpha^3)^{1344} + (\beta^3)^{1344} = 2$	2p
	c) $2 = 2 z = 2z = (z+1) + z(z^2+1) + (-z^3-1) \leq z+1 + z \cdot z^2+1 + -z^3-1 $	1p