



BAREME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ,- CLASA a V-a - 24 FEBRUARIE 2019

1. Calculați:

$$A = 3^{23} \cdot \{3^{22} + 3 \cdot [2 \cdot 3^{20} + 3 \cdot (3^{18} + 9^9 + 27^6)] + (2^7 \cdot 3^6)^6 : (8^7 \cdot 9^4)^2 \cdot 9\}.$$

Soluție:

$$3^{18} + 9^9 + 27^6 = 3^{18} + (3^2)^9 + (3^3)^6 = 3^{18} + 3^{18} + 3^{18} = 3^{19} \quad 2p$$

$$3 \cdot [2 \cdot 3^{20} + 3 \cdot (3^{18} + 9^9 + 27^6)] = 3 \cdot [2 \cdot 3^{20} + 3 \cdot 3^{19}] = 3 \cdot [2 \cdot 3^{20} + 3^{20}] = 3 \cdot [3^{20}(2 + 1)] = 3 \cdot [3^{20} \cdot 3] = 3 \cdot 3^{21} = 3^{22} \quad 1p$$

$$(2^7 \cdot 3^6)^6 : (8^7 \cdot 9^4)^2 \cdot 9 = (2^{42} \cdot 3^{36}) : ((2^3)^7 \cdot (3^2)^4)^2 \cdot 3^2 =$$

$$(2^{42} \cdot 3^{36}) : (2^{42} \cdot 3^{16}) \cdot 3^2 = 3^{20} \cdot 3^2 = 3^{22} \quad 2p$$

$$A = 3^{23} \cdot (3^{22} + 3^{22} + 3^{22}) = 3^{23} \cdot (3^{22} \cdot 3) = 3^{23} \cdot 3^{23} = 1 \quad 2p$$

2. Se consideră șirul de numere: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,

a) Aflați ultima cifră a numărului de pe locul 2019.

b) Determinați restul împărțirii sumei primilor 2019 termeni la 5.

Soluție:

$$a) \ a_1 = 2^1, a_2 = 2^2, a_3 = 2^3, a_4 = 2^4, a_5 = 2^5,$$

$$a_6 = 2^6, a_7 = 2^7, a_8 = 2^8, \quad 1p$$

$$a_{2019} = 2^{2019} \quad 1p$$

Ultima cifră este 8. 2p

$$b) \ 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2019} = 2^{2020} - 2 \quad 2p$$

$$U(2^{2020} - 2) = 4. \text{ Restul este } 4. \quad 1p$$

3. Cinci gutui cântăresc tot atât cât 9 mere, 7 mere cât 8 pere, iar 9 pere cât 10 portocale.

Dacă pe un taler al unei balanțe așezăm 7 gutui, câte portocale trebuie să așezăm pe celălalt taler pentru ca balanța să fie în echilibru?

Soluție.

$$5 \text{ gutui} \dots 9 \text{ mere} \Rightarrow 7 \cdot 5 \text{ gutui} \dots 7 \cdot 9 \text{ mere} \Leftrightarrow 35 \text{ gutui} \dots 63 \text{ mere} \quad 2p$$

$$7 \text{ mere} \dots 8 \text{ pere} \Rightarrow 9 \cdot 7 \text{ mere} \dots 9 \cdot 8 \text{ pere} \Leftrightarrow 63 \text{ mere} \dots 72 \text{ pere} \quad 2p$$

9 pere ...10 portocale $\Rightarrow 8 \cdot 9$ pere... $8 \cdot 10$ portocale $\Leftrightarrow 72$ pere....80 portocale **2p**

$\Rightarrow 35$ gutui...80 portocale $\Rightarrow 35:5$ gutui... $80:5$ portocale $\Rightarrow 7$ gutui...16 portocale **1p**

4. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale de la 1 la 2019. Elevii Andrei și Bogdan șterg pe rând, începând cu Andrei, câte un număr. Pierde elevul care este obligat să șteargă primul un multiplu al lui 2 sau un multiplu al lui 5. Care elev câștigă , Andrei sau Bogdan? Justificați răspunsul.

Soluție

Fiecare elev trebuie sa evite numerele “periculoase”, adică :

Multiplii lui 2 care sunt în număr de $2018:2=1009$, **1p**

Multiplii lui 5 care sunt în număr de $2015:5=403$ **1p**

Printre aceste numere apar de doua ori multiplii lui 10 care sunt în număr de $2010:10=201$ **1p**

Prin urmare numerele “ periculoase” sunt în număr de $1009+403-201=1211$ **1p**

Avantajoase sunt numai $2019-1211=808$ numere **1p**

Deoarece jucătorul Andrei este obligat sa șteargă al 809-lea număr, el va pierde. **2p**