

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a XII-a

1. (7p) Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x + x^{n+1} + x^{2n+1} + x^{3n+1}}$. Determinați primitivele funcției f .

Petru Vlad

2. (7p) $(G, \cdot)$ este un grup pentru care există un număr natural n , $n \geq 3$, astfel încât $\forall x, y \in G, (xy)^n = x^n \cdot y^n, (xy)^{n+1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1}, (xy)^{n+2} = x^{n+2} \cdot y^{n+2}$. Arătați că grupul este comutativ.

3. (7p) Se consideră numerele reale a, b și funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\int_{at}^{bt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$, oricare ar fi $t \in (0, 2)$. Demonstrați că $af(a) = bf(b)$.

GM10/2014

4. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se definește legea $x * y = x^{\ln y}$. Se știe că $(G, *)$ este grup comutativ cu elementul neutru e , baza logaritmului natural.

(4p) a) Dacă $H = \{e^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q}^*\}$, arătați că H este subgrup al grupului $(G, *)$.

(3p) b) Considerând grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, arătați că $f : G \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \ln x$ este un izomorfism de grupuri.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.