

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A**

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $G = (-k, k)$, unde $k > 0$, se consideră operația „ $*$ ” definită prin $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2 + xy}$.

a) Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Arătați că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{k^2 - t^2} dt$ este un izomorfism de grupuri de la $(G, *)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

c) Pentru $k=1$ demonstrați că pentru orice $a \in G$ ecuația $x * x = a$ are o unică soluție $x \in G$.

Prof. Cătălin Bîrzescu, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) Se arată că oricare ar fi $x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$ **1 punct**

Se verifică asociativitatea și comutativitatea. Elementul neutru este $e = 0 \in G$ și orice element $x \in G$ este simetrizabil, simetricul lui x fiind $x' = -x \in G$. Deci $(G, *)$ este grup abelian **1 punct**

b) $f(x) = \int_0^x \frac{1}{k^2 - t^2} dt = -\frac{1}{2k} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| \Big|_0^x = \frac{1}{2k} \ln \frac{k+x}{k-x}$ **1 punct**

Deoarece $f(x * y) = \frac{1}{2k} \ln \frac{k + x * y}{k - x * y} = \frac{1}{2k} \ln \frac{(k+x)(k+y)}{(k-x)(k-y)} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k+x}{k-x} + \frac{1}{2k} \ln \frac{k+y}{k-y} = f(x) + f(y)$, oricare

ar fi $x, y \in G$, înseamnă că f este morfism de grupuri **1 punct**

Se arată că f este bijectivă și rezultă că f este izomorfism de grupuri de la $(G, *)$ la $(\mathbb{R}, +)$... **1 punct**

c) Fie $a \in G$.

$x * x = a \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = a \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a = 0$. Cum $\Delta = 4 - 4a^2 > 0$ pentru orice $a \in G$ rezultă că ecuația are două rădăcini reale și distincte **1 punct**

Din relațiile lui Viète avem că $x_1 = \frac{1}{x_2}$ și se arată că ecuația are o singură soluție în G **1 punct**

SUBIECTUL II

Fie $(G, \cdot)$ grup și $x, y \in G$.

a) Arătați că $(xyx^{-1})^{2019} = xy^{2019}x^{-1}$.

b) Arătați că dacă există un număr natural nenul n astfel încât $(xyx^{-1})^n = e$ atunci $y^n = e$.

c) Arătați că dacă $(y^{-1}xy)^4 = e$ și $xy = yx^2$ atunci $x = e$.

Prof. Cătălin Bîrzescu, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) $(xyx^{-1})^{2019} = \underbrace{(xyx^{-1})(xyx^{-1}) \dots (xyx^{-1})}_{\text{de 2019 ori}} = xy^{2019}x^{-1}$ **2 puncte**

b) Notăm $z = xyx^{-1}$.

Avem că $z^n = e$ și $zx = xy$

$$x = ex = z^n x = z^{n-1} zx = z^{n-1} xy = (z^{n-2} z) xy = z^{n-2} (zx) y = z^{n-2} (xy) y = z^{n-2} xy^2 = \dots =$$

$$= zxy^{n-1} = xyy^{n-1} = xy^n \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Deci $xy^n = x$ și prin simplificare la stânga cu x obținem $y^n = e \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

c) Deoarece $(y^{-1}xy)^4 = y^{-1}x^4y$ relația $(y^{-1}xy)^4 = e$ devine $y^{-1}x^4y = e$, adică $x^4 = e \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Din relația $xy = yx^2$ obținem $x = yx^2y^{-1}$. Rezultă că $x^2 = yx^4y^{-1}$, adică $x^2 = e \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Cum $xy = yx^2$ rezultă că $xy = y$ și prin simplificare la dreapta cu y obținem $x = e \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

SUBIECTUL III

a) Calculați $\int \frac{x \cdot \arctg x}{(1+x^2)^2} dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg(x^2)}{1+x^2} dx$.

Prof. Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) $\int \frac{x \cdot \arctg x}{(1+x^2)^2} dx = \int \left(-\frac{1}{2(1+x^2)} \right)' \cdot \arctg x dx = -\frac{1}{2(1+x^2)} \cdot \arctg x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$$= -\frac{1}{2(1+x^2)} \cdot \arctg x + \frac{1}{4} \arctg x + \frac{x}{4(1+x^2)} + C \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b) Notăm $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg(x^2)}{1+x^2} dx$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{x}$ și obținem:

$$I_n = -\int_n^{\frac{1}{n}} \frac{\arctg\left(\frac{1}{t^2}\right)}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg\left(\frac{1}{t^2}\right)}{1+t^2} dt \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$2I_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg(x^2) + \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^2} dx. \text{ Cum } \arctg x + \arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ oricare ar fi } x \in (0, \infty) \text{ obținem:}$$

$$2I_n = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\arctg n - \arctg \frac{1}{n} \right) \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{4} \left(\arctg n - \arctg \frac{1}{n} \right) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

SUBIECTUL IV

Calculați $\int_2^6 \frac{\ln(x-1)}{x^2+2x+2} dx$.

G.M. Nr. 5 / 2018, Prof. Radu Diaconu, Sibiu

Soluție: Notăm $I = \int_2^6 \frac{\ln(x-1)}{x^2+2x+2} dx$.

Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{t+4}{t-1}$ integrala se rescrie

$$I = \int_2^6 \frac{\ln\left(\frac{t+4}{t-1} - 1\right)}{\left(\frac{t+4}{t-1}\right)^2 + 2\frac{t+4}{t-1} + 2} \cdot \frac{-5}{(t-1)^2} dt = \int_2^6 \frac{\ln 5 - \ln(t-1)}{5(t^2+2t+2)} \cdot \frac{5}{(t-1)^2} dt = \int_2^6 \frac{\ln 5 - \ln(t-1)}{t^2+2t+2} dt = \dots\dots\dots \mathbf{3 \text{ puncte}}$$

$$= \ln 5 \int_2^6 \frac{1}{t^2+2t+2} dt - \int_2^6 \frac{\ln(t-1)}{t^2+2t+2} dt = \ln 5 \int_2^6 \frac{1}{t^2+2t+2} dt - I \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

$$\text{Deci } I = \frac{\ln 5}{2} \int_2^6 \frac{1}{(t+1)^2+1} dt = \frac{\ln 5}{2} \arctg(t+1) \Big|_2^6 = \frac{\ln 5}{2} (\arctg 7 - \arctg 3) \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$