



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a X-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

(3p) a) Demonstrați că $\sqrt[3]{7 - a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 + a\sqrt{2}} = 2$, dacă și numai dacă $a \in \{-5, 5\}$.

(4p) b) Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x^2} + 4^{x^2} = 5^{x^2}$.

Soluție:

a) Demonstrarea relației prin folosirea formulelor de calcul prescurtat 3p

b) Scrierea ecuației sub forma $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} = 1$ 1p

Funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este descrescătoare, deci ecuația $f(x)=1$ are cel mult o soluție2p

Finalizare $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$ 1p

Problema 2

Fie $a \in (0, \infty)$ și $n \in N, n \geq 2$. Demonstrați că $\log_3 \sqrt[n]{a} + \log_3 \sqrt[n]{a} + \log_3 \sqrt[n]{a} + \dots + \log_3 \sqrt[n]{a} = \log_3 \sqrt[n]{a^n}$.

Soluție:

Suma din stânga poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{2} \log_3 a + \frac{1}{6} \log_3 a + \frac{1}{12} \log_3 a + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \log_3 a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right) \log_3 a \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Observăm că } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$\log_3 \sqrt[n]{a} + \log_3 \sqrt[n]{a} + \log_3 \sqrt[n]{a} + \dots + \log_3 \sqrt[n]{a} = \frac{n}{n+1} \log_3 a = \log_3 a^{\frac{n}{n+1}} = \log_3 \sqrt[n+1]{a^n} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3

Fie $x, y, z, t \in (1, \infty)$. Folosind inegalitatea $e^x \geq 1 + x, \forall x \in R$ arătați că:

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{x} + \frac{\ln(1+\sqrt{y-1})}{y} + \frac{\ln(1+\sqrt{z-1})}{z} + \frac{\ln(1+\sqrt{t-1})}{t} < 2.$$

(Gazeta Matematică nr. 4/2018)

Soluție:

În inegalitatea $e^x \geq 1+x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ înlocuim pe x cu $\frac{x}{2}$ și avem $e^{\frac{x}{2}} \geq 1 + \frac{x}{2}$ 1p

Folosim inegalitatea mediilor pentru 1 și $x-1$:

$$\frac{1+(x-1)}{2} > \sqrt{1(x-1)} \Leftrightarrow \frac{x}{2} > \sqrt{x-1} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Atunci } e^{\frac{x}{2}} \geq 1 + \frac{x}{2} > 1 + \sqrt{x-1} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Logaritmăm și avem:

$$\ln e^{\frac{x}{2}} > \ln(1+\sqrt{x-1}), \text{ de unde } \frac{x}{2} > \ln(1+\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ln(1+\sqrt{x-1}) < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Analog avem: } \frac{1}{y} \ln(1+\sqrt{y-1}) < \frac{1}{2}, \frac{1}{z} \ln(1+\sqrt{z-1}) < \frac{1}{2} \text{ și } \frac{1}{t} \ln(1+\sqrt{t-1}) < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Adunăm cele patru inegalități și avem:

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{x} + \frac{\ln(1+\sqrt{y-1})}{y} + \frac{\ln(1+\sqrt{z-1})}{z} + \frac{\ln(1+\sqrt{t-1})}{t} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Să se arate că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Soluție:

$$\text{Avem } z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1} \text{ și analoagele} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2 + z_3)^2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) \\ &= 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) = 2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \quad \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

$$= 2z_1 z_2 z_3 (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = 2z_1 z_2 z_3 \overline{(z_1 + z_2 + z_3)} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Considerând modulul relației avem că } |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2 \quad \dots\dots 2p$$