

Barem de corectare OLM 2017 Clasa a XII-a

1. a) $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = 1 = f(1), \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \frac{a}{4}$ (1p)

Dacă $a = 4 \Rightarrow f$ continuă $\Rightarrow f$ admite primitive (1p)

Dacă $a \neq 4 \Rightarrow 1$ punct de discontinuitate de speța I $\Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux
 $\Rightarrow f$ nu admite primitive (1p)

b) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{2\pi^2}$ (2p)

$\int_1^3 f(x)dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, deci $\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2\pi^2} + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ (2p)

SAU

Se găsește o primitivă F a funcției f (3p)

Se calculează $F(3) - F(0)$ (1p)

2. a) Dacă $r > 1$, atunci pentru $z \in H$ avem $z^2 \in H$, dar $|z^2| = r^2 > r$, contradicție (1p)

Dacă $r < 1$, atunci pentru $z \in H$ avem $z^2 \in H$, dar $|z^2| = r^2 < r$, contradicție $\Rightarrow r = 1$.. (1p)

b) Arătăm că H este subgrup al lui $(C^*, \cdot)$ (1p)

H fiind parte stabilă, trebuie arătată doar existența inverselor (1p)

Pentru $z \in H$ considerăm șirul de puteri $z^1, z^2, z^3, \dots$ (1p)

H finită $\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}^*, k < l$ cu $z^k = z^l$. Deci $z^n = 1$, unde $n = l - k \in \mathbb{N}^*$ (1p)

Dacă $n = 1 \Rightarrow z = 1$ inversabil. Dacă $n > 1$, din $z \cdot z^{n-1} = 1 \Rightarrow z$ inversabil (1p)

3. a) Dacă în G asemenea elemente nu există, afirmația este adevărată (0 este par) (1p)

Dacă $a \in G \setminus \{e\}$ cu $a^2 \neq e$, atunci $a \neq a^{-1}$ (1p)

Dacă $a \in G \setminus \{e\}$ cu $a^2 \neq e$, atunci $(a^{-1})^2 \neq e$ (2p)

Deci elementele cu proprietatea dată apar sub formă de perechi $\Rightarrow$ numărul lor este par .. (1p)

b) Dacă n este par, atunci $G \setminus \{e\}$ are un număr impar de elemente (1p)

Cum numărul de elemente $a \in G \setminus \{e\}$ cu $a^2 \neq e$ este par, rezultă că există un element $a \in G \setminus \{e\}$ cu $a^2 = e$ (2p)

4. Pentru fiecare $x \in [0, 1]$ avem $1 \leq \sqrt[n]{1+x} \leq \sqrt[n]{2}$ (1p)

Rezultă $\ln(2+x) \leq \sqrt[n]{1+x} \ln(2+x) \leq \sqrt[n]{2} \ln(2+x), \forall x \in [0, 1]$ (1p)

Integrând, avem $\int_0^1 \ln(2+x)dx \leq \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} \ln(2+x)dx \leq \sqrt[n]{2} \int_0^1 \ln(2+x)dx$ (1p)

Se calculează $\int_0^1 \ln(2+x)dx = \ln \frac{27}{4} - 1$ (2p)

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, din teorema cleștelui rezultă că limita cerută este $\ln \frac{27}{4} - 1$ (2p)