

Barem de corectare OLM 2017 Clasa a IX-a

1. Dacă b_n este primul termen de pe linia n , atunci $b_n = x_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ (2p)

Termenii de pe axa de simetrie a triunghiului apar numai pe linii impare, la mijlocul liniei.

Cum $b_{2n+1} = x_{n(2n+1)+1}$, termenul aflat la mijlocul liniei $2n+1$ este $x_{n(2n+1)+1+n}$ (2p)

Suma cerută este

$$\sum_{k=0}^{1008} x_{2k^2+2k+1} = \sum_{k=0}^{1008} (x_1 + (2k^2 + 2k)r) = 1009x_1 + 2r \sum_{k=0}^{1008} (k^2 + k) = 1009(x_1 + 678720r) \text{ (3p)}$$

2. Dacă $P(n): 13 \mid 2 \cdot 4^{2n+1} + 5 \cdot 3^{n+3}$, $n \in N$, atunci $P(0): 13 \mid 13$ (1p)

Pentru $n \in N$, presupunând $P(n)$ adevărată, avem $2 \cdot 4^{2n+1} + 5 \cdot 3^{n+3} = 13k$, $k \in N$ (2p)

$$2 \cdot 4^{2n+1} = -5 \cdot 3^{n+3} + 13k, k \in N \text{ (1p)}$$

$$P(n+1): 13 \mid 2 \cdot 4^{2n+3} + 5 \cdot 3^{n+4} \text{ (1p)}$$

$$2 \cdot 4^{2n+3} + 5 \cdot 3^{n+4} = (-5 \cdot 3^{n+3} + 13k) \cdot 16 + 5 \cdot 3^{n+4} = 13(16k - 5 \cdot 3^{n+3}), \text{ deci } P(n+1) \text{ este adevărată, de unde } P(n) \text{ este adevărată pentru orice } n \text{ natural (2p)}$$

3. Inegalitatea este echivalentă cu $2ac + 2bc - 2ab \leq a^2 + b^2 + c^2$ (1p)

Se obține $(a+b-c)^2 \geq 0$, adevărată pentru orice numere reale a, b, c (2p)

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $c = a+b$ (1p)

Folosind ipoteza, $2b^2 + 2ab + 2a^2 - 3 = 0$; din $b \in R$ se obține $\Delta \geq 0$, adică $a^2 \leq 2$ (1p)

$$a \text{ maxim este } \sqrt{2}, \text{ deci } \Delta = 0, \text{ de unde } b = -\frac{\sqrt{2}}{2}, c = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (2p)}$$

4. Folosind teorema lui Sylvester obținem: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$ (3p)

$$3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \text{ (2p)}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OG_1} \text{ (1p)}$$

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_1}, \text{ de unde rezultă că punctele } O, G, G_1 \text{ sunt coliniare și } OG_1 = 3OG \text{ (1p)}$$