

Soluții și bareme orientative

Clasa a X-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Dacă $m(\hat{B}) < 90^\circ$ și $m(\hat{C}) < 90^\circ$ atunci funcția nu este injectivă deoarece, dacă $AA_1 \perp BC, A_1 \in BC$, atunci $A_1 \in (BC)$ și este suficient să alegem $E \in (A_1B), F \in (A_1C)$, astfel încât $EA_1 = FA_1$. Rezultă $d(A, E) = d(A, F), E \neq F$, deci f nu este injectivă.

(2p)

Dacă $m(\hat{B}) \geq 90^\circ$ sau $m(\hat{C}) \geq 90^\circ$, atunci funcția f este injectivă.

Să presupunem că $m(\hat{B}) \geq 90^\circ$ (celălalt caz se tratează similar). Atunci, dacă $M_1 \in [BM_2)$, avem $BM_1 < BM_2 \Rightarrow AM_1 < AM_2 \Rightarrow f(M_1) < f(M_2)$. Rezultă că funcția f este strict crescătoare când parcurge intervalul $[BC]$, deci f este injectivă. Funcția este injectivă pentru un triunghi ABC dreptunghic sau obtuz, cu $m(\hat{B}) \geq 90^\circ$ sau $m(\hat{C}) \geq 90^\circ$.

(3p)

b) Avem $\min_{M \in [BC]} f(M) = d(A, BC) = \alpha$ și $\max_{M \in [BC]} f(M) = \max\{AB, AC\} = \beta$. Atunci

$$\text{Im } f = [\alpha, \beta].$$

(2p)

2. a) Fie $z = x + yi$, ecuația din enunț se mai scrie:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} - 2(x+yi) = 3 - 6i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} - 2x = 3 \\ -2y = -6 \end{cases}.$$

(1p)

Soluția ecuației din enunț: $z = 1 + 3i$.

(1p)

b) Notăm $t = |1+z|, 0 \leq t \leq 2$.

$$t^2 = |1+z|^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 2 + z + \bar{z} \text{ deci } z + \bar{z} = t^2 - 2. \text{ Rezultă:}$$

$$|1-z+z^2|^2 = (1-z+z^2)(1-\bar{z}+\bar{z}^2) = 3 - 2(z+\bar{z}) + z^2 + \bar{z}^2 = (z+\bar{z}-1)^2 = (t^2-3)^2.$$

Inegalitatea de demonstrat devine $\sqrt{3} \leq t + |t^2-3| \leq \frac{13}{4}, t \in [0, 2] (*)$.

(2p)

Dacă $f(t) = t + |t^2-3| = \begin{cases} -t^2+t+3, & t \in [0, \sqrt{3}] \\ t^2-t-3, & t \in (\sqrt{3}, 2] \end{cases}$ atunci variația funcției f este următoarea:

t	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f(t)$	3	$\nearrow \frac{13}{4}$	$\searrow \sqrt{3}$	$\nearrow 3$

$$\text{Deci } \sqrt{3} \leq f(t) \leq \frac{13}{4}.$$

(1p)

$$\text{Egalitatea din stânga se realizează când } t = \sqrt{3} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(1p)

$$\text{Egalitatea din dreapta se realizează când } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{7}{8} \pm i \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

(1p)

3. Recurența din enunț se mai scrie:

$x_{n+2} + x_n + \log_2(x_{n+2} + x_n) = 2x_{n+1} + \log_2 2x_{n+1}$. Considerăm funcția:

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t + \log_2 t. \quad (2p)$$

f este o funcție strict crescătoare, deci f este injectivă și din $f(x_{n+2} + x_n) = f(2x_{n+1})$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+2} + x_n = 2x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ progresie aritmetică.} \quad (3p)$$

$$\text{Din } x_{1006} = 2016, x_{2017} = 4038 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1005 \cdot r = 2016 \\ x_1 + 2016 \cdot r = 4038 \end{cases} \Rightarrow r = 2, x_1 = 6 \Rightarrow$$

$$x_n = 2n + 4. \quad (2p)$$

$$4.a) \text{ Pentru } a, b \in \mathbb{R}, (a^2 + 1) \cdot (b^2 + 1) \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow (ab - 1)^2 \geq 0. \quad (1p)$$

$$b) \text{ Logaritmând inegalitatea: } (a^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + c)^2, \forall a, c \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \log_{a+b} (a^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 2 \log_{a+b} (a + c) \text{ și analog} \quad (1p)$$

$$\log_{b+c} (b^2 + 1)(a^2 + 1) \geq 2 \log_{b+c} (b + a), \log_{c+a} (c^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 2 \log_{c+a} (c + b). \quad (1p)$$

Prin adunarea celor trei inegalități obținem:

$$\begin{aligned} & \log_{a+b} (a^2 + 1)(c^2 + 1) + \log_{b+c} (b^2 + 1)(a^2 + 1) + \log_{c+a} (c^2 + 1)(b^2 + 1) \geq \\ & \geq 2(\log_{a+b} (a + c) + \log_{b+c} (b + a) + \log_{c+a} (c + b)). \end{aligned} \quad (1p)$$

Folosind inegalitatea mediilor:

$$\log_{a+b} (a + c) + \log_{b+c} (b + a) + \log_{c+a} (c + b) \geq 3. \quad (2p)$$

$$\text{Rezultă: } \log_{a+b} (a^2 + 1)(c^2 + 1) + \log_{b+c} (b^2 + 1)(a^2 + 1) + \log_{c+a} (c^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 6. \quad (1p)$$