

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a IX- a

Subiecte :

1. Numerele $x, y, z \in (0, \infty)$ verifică relația $x + y + z = a$. Arătați că :
 - a) $xy + yz + xz \leq \frac{a^2}{3}$.
 - b) $\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} < \frac{3a}{2}$.
2. a) Arătați că numerele $1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
b) Arătați că numerele $1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ nu pot fi printre termenii unei progresii aritmetice, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
3. Fie $ABCD$ un paralelogram, $m, n, p, q \in (0,1)$ și punctele $E \in (AB), F \in (BC), G \in (CD), H \in (AD)$ astfel încât $\overrightarrow{AE} = m \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF} = n \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG} = p \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DH} = q \overrightarrow{DA}$. Știind că vectorii $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, să se arate că $m + n + p + q = 2$.
4. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P mijloacele laturilor $[AB], [BC]$ respectiv $[CD]$. Fie Q mijlocul lui $[MP]$, E mijlocul lui $[AQ]$ și F mijlocul lui $[EN]$. Să se arate că :
 - a) $4\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.
 - b) Punctele D, Q, F sunt coliniare.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 3 ore. La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.