



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020**

Barem - Clasa a IX-a

SUBIECTUL I

$$\left[x^2 \right] \cdot \{1 + x^2\} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[x^2 \right] \cdot \{x^2\} = \left[x^2 \right] + \{x^2\} - 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow (\left[x^2 \right] - 1) \cdot (\{x^2\} - 1) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Cum } \{x^2\} \neq 1 \Rightarrow \left[x^2 \right] = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{cu soluția } x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL II

Din $a, b, c \geq 1$ avem că $a \geq \sqrt{a}$ și celelalte, inegalitatea devine

$$\frac{a}{a+2\sqrt{b}+c} + \frac{b}{b+2\sqrt{c}+a} + \frac{c}{c+2\sqrt{a}+b} \geq \frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+a} + \frac{c}{c+2a+b} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Arătăm că } \frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+a} + \frac{c}{c+2a+b} \geq \frac{3}{4}.$$

Amplificăm fiecare fracție cu numărătorul, aplicăm Lema Titu și avem:

$$\frac{a^2}{a^2+2ba+ca} + \frac{b^2}{b^2+2cb+ab} + \frac{c^2}{c^2+2ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ba+ca+b^2+2cb+ab+c^2+2ac+bc} \dots\dots 2p$$

$$\text{Prin calcul direct } \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ba+ca+b^2+2cb+ab+c^2+2ac+bc} \geq \frac{3}{4} \text{ este echivalentă cu}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \dots\dots\dots 3p$$

SUBIECTUL III

Presupunem că este progresie geometrică

$$\Rightarrow (a+b)^2 = c \left(2c + \frac{ab}{c} \right) \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 2c^2 \dots\dots\dots 2p$$

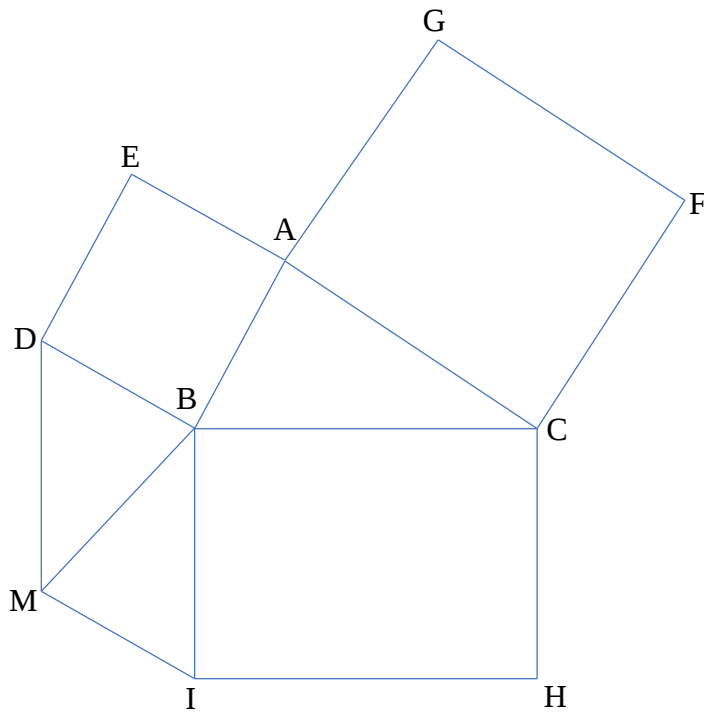
$$a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow a = \frac{m}{s}, b = \frac{n}{s}, c = \frac{k}{s}, \text{ cu } m, n, k \in \mathbb{Z}^*, s \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m^2 + m \cdot n + n^2 = 2k^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2^\alpha \cdot m_1, \alpha \in \mathbb{N}, m_1 \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ n = 2^\beta \cdot n_1, \beta \in \mathbb{N}, n_1 \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ k = 2^\gamma \cdot k_1, \gamma \in \mathbb{N}, k_1 \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{2\alpha} \cdot m_1^2 + 2^{\alpha+\beta} \cdot m_1 \cdot n_1 + 2^{2\beta} \cdot n_1^2 = 2^{2\gamma+1} \cdot k_1^2$$

$$\text{Putem alege } \alpha \leq \beta \Rightarrow 2^{2\alpha} / 2^{2\gamma+1} \Rightarrow \alpha \leq \gamma \Rightarrow m_1^2 + 2^{\beta-\alpha} \cdot m_1 \cdot n_1 + 2^{2(\beta-\alpha)} \cdot n_1^2 = 2^{2(\gamma-\alpha)+2} \cdot k_1^2, \text{ fals}$$

(impar=par!)4p

SUBIECTUL IV



- a)** $\triangle BIM \equiv \triangle CBA(LUL) \Rightarrow BM = AG$ și $\widehat{MBA} \equiv \widehat{GAB} \Rightarrow BM \parallel AG$ deci $BMAG$ paralelogram.

..... 2p

- b)** Fie T centrul de greutate al $\triangle ABC$

$$\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TG} + \overrightarrow{TH} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$$

Deci T centrul de greutate al $\triangle DEF$ 3p

- c) $\vec{0} = \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TG} + \overrightarrow{TH} = \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH}$ deci se poate forma triunghi cu lungimile celor trei segmente..... 2p