

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_1 = \sqrt[4]{2015}$, $a_{n+1} = \sqrt[4]{2015 + \sqrt[n+1]{a_n}}$ pentru orice $n \geq 1$. Să se calculeze $[a_1] + [a_2] + \dots + [a_{2015}]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.

a) Demonstrați că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

b) Demonstrați că $|z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{x-2014}{2015} - \left[\frac{x}{2015} \right] \right] = \log_{2016} \left(\frac{x}{2014} \right)$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

Problema 4. Dacă $a, b, c \in [2, +\infty)$, atunci $\log_{b+c} a + \log_{c+a} b + \log_{a+b} c \geq \frac{3}{2}$.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.