

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 28 februarie 2015- clasa a XII aSubiectul 1

Considerăm G un grup și funcția $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^3$ cu următoarele proprietăți:

a) f este surjectivă;

b) $f(xy) = f(x) \cdot f(y), (\forall) x, y \in G.$

i) Demonstrați că $x^2 y = y x^2, (\forall) x, y \in G.$

ii) Arătați că G este grup abelian.

G.M 1989

Subiectul 2

Fie A un inel și funcția $f : A \times A \rightarrow A$, definită prin $f(x, y) = (xy)^2 - x^2 y^2.$

a) Să se calculeze valoarea expresiei $E(x, y) = f(1+x, 1+y) - f(1+x, y) - f(x, 1+y) + f(x, y)$, unde $1 \in A$ este elementul unitate al inelului A .

b) Dacă inelul A are proprietatea că: $x + x = 0$ implică $x = 0$ și dacă $(xy)^2 - (yx)^2 = x^2 y^2 - y^2 x^2, (\forall) x, y \in A$, atunci A este un inel comutativ.

G.M 1984

Subiectul 3

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)}}{e^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}$. (Se admite cunoscut următorul rezultat: șirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, n \geq 1$, este

convergent, iar limita sa $C \in (0, 1)$)

G.M 2014

Subiectul 4

Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 x f(x) dx = 0.$

a) Dacă $F(t) = \int_t^1 f(x) dx$, arătați că $\int_0^1 F(t) dt = 0.$

b) Să se arate că există $C \in (0, 1)$ astfel încât $f(C) = \left(\int_C^1 f(x) dx \right)^2.$

G.M 2014

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.