



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a XI-a

Barem

SUBIECTUL 1

Notăm cu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, înmulțind la stînga și apoi la dreapta ecuația dată obținem

succesiv $X^{2010} + 2X^2 = X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ 1p

Obținem că $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ 2p

Arătăm că $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nca^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$ 1p

Astfel ecuația se reduce la $a^{2019} + 2a = 3$ și $2019ca^{2018} + 2c = 2021$ 1p

$a = 1$, soluție unică, pentru că $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2019} + 2x$ funcția este strict crescătoare 1p

Rezultă $c = 1$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

SUBIECTUL 2

Înmulțind a doua relație avem $A^3(A-B) + (A-B)^4 = O_2$, $A^2(A^2 - AB) + (A-B)^4 = O_2$

Dar $A^2 = AB$ implică $(A-B)^4 = O_2$, deci $(A-B)^2 = O_2$ 2p

$(A-B)(A-B) = O_2$, $A^2 + B^2 - AB - BA = O_2$, adică $B^2 = BA$ 2p

Din $A^3 + (A-B)^3 = O_2$ avem că $A^3 = O_2 \Rightarrow A^2 = O_2 \Rightarrow AB = A^2 = O_2$ 2p

Din $B^2 = BA$ avem că $B^3 = BAB = O_2 \Rightarrow B^2 = O_2 \Rightarrow BA = O_2 \Rightarrow BA = AB = O_2$ 1p

SUBIECTUL 3

Din ipoteză avem că $\forall \varepsilon > 0, \exists m = n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $k - \varepsilon < x_m < k$ 2p

Presupunem prin absurd că $a \notin \mathbf{Z} \Rightarrow a = p + \alpha$, $p \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in (0;1)$ 1p

$[x_n + p + \alpha] = [x_n] + p \Rightarrow [x_n + \alpha] = [x_n] \forall n \in \mathbf{N}^*$ (1) 1p

Acum pentru $\varepsilon = \alpha \in (0;1) \Rightarrow \exists t = n_\alpha \in \mathbf{N}^*$ cu $k - 1 < k - \alpha < x_t < k \Rightarrow [x_t] = k - 1$ (2) 1p

Dar $k < x_t + \alpha < k + \alpha < k + 1 \Rightarrow [x_t + \alpha] = k$ (3) 1p

Din relațiile (1), (2), (3) obținem $k = k - 1$, deci contradicție, adică în final $a \in \mathbf{Z}$ 1p

SUBIECTUL 4

a) $a_n > n \cdot \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\arctg \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 3p

b) Dacă $\alpha \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = +\infty$ 1p

Dacă $\alpha > 0$, putem aplica criteriul Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}-\alpha} = \begin{cases} 2, & \alpha = \frac{1}{2} \\ 0, & \alpha > \frac{1}{2} \\ +\infty, & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

Notă. Orice altă rezolvare corectă primește punctajul maxim.