

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a XII -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e și $x, y \in G \setminus \{e\}$ astfel încât $\text{ord}(x) = 2$, $y^6 = e$ și $xy = y^4x$. Să se arate că $\text{ord}(y) = 3$ și $xy = yx$.

Soluție:

Deoarece $\text{ord}(x) = 2 \Rightarrow x^2 = e$ și cum $xy = y^4x$ avem $(yx)^2 = y(xy)x = y(y^4x)x = y^5x^2 = y^5$.

Atunci, din $y^6 = e$ obținem $(yx)^3 = y^5(yx) = y^6x = x$. Prin urmare, $(yx)^6 = [(yx)^3]^2 = x^2 = e$.

Dar $(yx)^2 = y^5$ și deci $y^{15} = e$. Prin urmare $(y^6)^2 \cdot y^3 = e$, de unde $y^3 = e$. Cum 3 este prim, iar $y \in G \setminus \{e\}$ avem că $\text{ord}(y) = 3$.

Mai mult, $xy = y^4x = y^3yx = eyx = yx$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Arată că $(yx)^2 = y^5$	2p
Arată că $(yx)^3 = x$	1p
Arată că $(yx)^6 = e$.	1p
Arată că $y^3 = e$	1p
Justifică faptul că $\text{ord}(y) = 3$	1p
Arată că $xy = yx$	1p

2. Fie $k \in (1, +\infty)$ și $G = (-\infty, \frac{k^2-1}{k}] \cup [\frac{k^2+1}{k}, +\infty)$.

Se consideră operația $x * y = kxy - k^2(x + y) + k^3 + k, \forall x, y \in G$.

- a) Să se demonstreze că $t \in G$ dacă și numai dacă $|t - k| \geq \frac{1}{k}, \forall k \in (1, +\infty)$.
- b) Arătați că „ $*$ ” este lege de compoziție pe G .
- c) Studiați existența elementului neutru și a elementelor simetrizabile.

Soluție:

$$a) \quad t \in G \Leftrightarrow t \in (-\infty, \frac{k^2-1}{k}] \cup [\frac{k^2+1}{k}, +\infty) \Leftrightarrow t - k \in (-\infty, \frac{-1}{k}] \cup [\frac{1}{k}, +\infty) \Leftrightarrow |t - k| \geq \frac{1}{k}, \forall k \in (1, +\infty)$$

$$b) \quad \text{Fie } x, y \in G \Rightarrow |x - k| \geq \frac{1}{k} \text{ și } |y - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |(x - k)(y - k)| \geq \frac{1}{k^2} \\ \Rightarrow |xy - kx - ky + k^2| \geq \frac{1}{k^2} \Rightarrow |kxy - k^2(x + y) + k^3| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow |kxy - k^2(x + y) + k^3 + k - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |x * y - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow x * y \in G$$

c) Fie $e \in G$ astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in G$

$$x * e = x, \forall x \in G \Rightarrow kxe - k^2(x + e) + k^3 + k = x, \forall x \in G \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - k)(ke - k^2 - 1) = 0, (\forall) x \in G \Rightarrow ke - k^2 - 1 = 0 \Rightarrow e = k + \frac{1}{k} \in G. \\ e * x = x, \forall x \in G \Rightarrow kex - k^2(e + x) + k^3 + k = x, \forall x \in G \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - k)(ke - k^2 - 1) = 0, (\forall) x \in G \Rightarrow ke - k^2 - 1 = 0 \Rightarrow e = k + \frac{1}{k} \in G. \\ \Rightarrow e = k + \frac{1}{k} \text{ este element neutru.}$$

$x \in G$ simetrizabil $\Leftrightarrow (\exists) x' \in G$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

$$x * x' = e \Leftrightarrow kxx' - k^2(x + x') + k^3 + k = k + \frac{1}{k} \Rightarrow k^2xx' - k^3(x + x') + k^4 - 1 = 0 \\ \Rightarrow x'k^2(x - k) = k^3x - k^4 + 1 \xrightarrow{x \neq k} x' = \frac{k^3x - k^4 + 1}{k^2(x - k)} \Rightarrow x' - k = \frac{k^3x - k^4 + 1}{k^2(x - k)} - k \\ \Rightarrow x' - k = \frac{1}{k^2(x - k)}, x \in G, x \neq k, k > 1$$

$$\text{Dar } x' \in G \Rightarrow |x' - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \left| \frac{1}{k^2(x - k)} \right| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |x - k| \leq \frac{1}{k}, \forall k > 1$$

Cum $|x - k| \geq \frac{1}{k}$ și $|x - k| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow |x - k| = \frac{1}{k} \Rightarrow x = k \pm \frac{1}{k} \in G, \forall k > 1$ sunt singurele elemente simetrizabile.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Arată $t \in G \Leftrightarrow t - k \geq \frac{1}{k}, \forall k \in (1, +\infty)$	1p
b) Fie $x, y \in G \Rightarrow (x - k)(y - k) \geq \frac{1}{k^2}$	1p
Arată $ x * y - k \geq \frac{1}{k} \Rightarrow x * y \in G$	1p
c) Ajunge la $(x - k)(ke - k^2 - 1) = 0, (\forall) x \in G$	1p
$e = k + \frac{1}{k}$ este element neutru	1p
$x' - k = \frac{1}{k^2(x-k)}, x \in G, x \neq k, k > 1$	1p
$x = k \pm \frac{1}{k} \in G$ sunt singurele elemente simetrizabile	1p

3. Determinați funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, știind că admite o primitivă F astfel încât

$$xf(x) + F(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}, \forall x \in (0, \infty) \text{ și } F(1) = 1 - \ln(1+e)$$

Soluție:

Dacă F este o primitivă a funcției f pe $(0, \infty)$, atunci F este derivabilă pe $(0, \infty)$ și

$F'(x) = f(x), \forall x \in (0, \infty)$. Observăm că $(xF(x))' = xf(x) + F(x), \forall x \in (0, \infty)$, deci

$(xF(x))' = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}$ și prin urmare $xF(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției

$$\frac{x+1}{x(1+xe^x)}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Calculăm atunci $I = \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx = \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)} dx$. Facem schimbarea de variabilă $xe^x = t$

și obținem $I_t = \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C$, de unde

$$I = \ln|xe^x| - \ln|xe^x + 1| + C = \ln(xe^x) - \ln(xe^x + 1) + C, \text{ deoarece } x \in (0, \infty).$$

Prin urmare $xF(x) = \ln\left(\frac{xe^x}{xe^x + 1}\right) + C, \forall x \in (0, \infty)$, deci

$$F(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{xe^x}{xe^x + 1}\right) + \frac{C}{x}, \forall x \in (0, \infty).$$

Cum $F(1) = 1 - \ln(1+e)$ avem că $1 - \ln(1+e) = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + C$, deci $C = 0$. Deci

$$F(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{xe^x}{xe^x + 1}\right), \forall x \in (0, \infty). \text{ Atunci}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{xe^x}{xe^x + 1}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{xe^x}{xe^x + 1}\right) + \frac{x+1}{x^2(xe^x + 1)}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Observă că $(xF(x))' = xf'(x) + F(x), \forall x \in (0, \infty)$	1p
Arată că $F(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $\frac{x+1}{x(1+xe^x)}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	1p
Calculează $I = \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$	2p
Determină $F(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{xe^x}{xe^x + 1} \right) + \frac{C}{x}, \forall x \in (0, \infty)$	1p
Arată că $C = 0$	1p
Determină f	1p

4. Calculați $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^3} e^x \sin x \, dx$, $x > -2$.

Soluție:

$$I = \int \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+2)^3} \cdot e^x \cdot \sin x \, dx = \int \frac{e^x \sin x}{x+2} \, dx - \int \frac{e^x \sin x}{(x+2)^2} \, dx + \int \frac{e^x \sin x}{(x+2)^3} \, dx =$$

$$= I_1 - I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int \frac{e^x \sin x}{x+2} \, dx = \int \frac{1}{x+2} \left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right]' \, dx =$$

$$= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2(x+2)} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{(x+2)^2} \, dx$$

$$I_3 = \int \frac{e^x \sin x}{(x+2)^3} \, dx = \int e^x \sin x \left(-\frac{1}{2(x+2)^2} \right)' \, dx =$$

$$= -\frac{e^x \sin x}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{(e^x \sin x)'}{(x+2)^2} \, dx = -\frac{e^x \sin x}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{(x+2)^2} \, dx$$

Deci,

$$I = I_1 - I_2 + I_3 =$$

$$= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2(x+2)} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{(x+2)^2} \, dx - \int \frac{e^x \sin x}{(x+2)^2} \, dx - \frac{e^x \sin x}{2(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{(x+2)^2} \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2(x+2)} - \frac{e^x \sin x}{2(x+2)^2} + C$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$I = \int \frac{e^x \sin x}{x+2} \, dx - \int \frac{e^x \sin x}{(x+2)^2} \, dx + \int \frac{e^x \sin x}{(x+2)^3} \, dx = I_1 - I_2 + I_3$	2p
$I_1 = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2(x+2)} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{(x+2)^2} \, dx$	2p
$I_3 = -\frac{e^x \sin x}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{(x+2)^2} \, dx$	2p
$I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2(x+2)} - \frac{e^x \sin x}{2(x+2)^2} + C$	1p