

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

1. Determinați numărul $n \in \mathbb{N}$ astfel încât fracția $\frac{3n+4}{2n+5}$ să fie reductibilă și determinați suma primilor 100 de numere n pentru care fracția este reductibilă.

Rezolvare

$$\left. \begin{matrix} d|3n+4 \\ d|2n+5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} d|6n+8 \\ d|6n+15 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d|7 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\left. \begin{matrix} 3n+4=7a \\ 2n+5=7b \end{matrix} \right\} \Rightarrow n-1=7(a-b) \Rightarrow n=7(a-b)+1 \text{ deci are forma } n=7k+1, k \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Primii 100 de numere n pentru care fracția este reductibilă sunt $n \in \{1, 8, \dots, 694\} \dots\dots\dots 0,5 \text{ p}$

$$1+8+15+\dots+694=1+(7 \cdot 1+1)+(7 \cdot 2+1)+\dots+(7 \cdot 99+1)=7 \cdot (1+2+\dots+99)+100=\dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$=7 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} + 100 = 34750 \dots\dots\dots 1,5 \text{ p}$$

2. Leul a vânat un antilop și l-a dus acasă pentru prânz pentru el și familia lui, leoaica și cei trei pui. Dacă ar mânca el singur ar termina în 3 ore, perechea lui ar putea mânca în 4 ore, iar fiecare dintre pui ar putea mânca în 10 ore. În câte ore consumă antilopul familia de lei?

Rezolvare

$$[3, 4, 10] = 60 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{În 60 de ore leul ar consuma 20 de antilopi} \dots\dots\dots 1,5 \text{ p}$$

$$\text{Leoaica ar consuma 15 de antilopi în 60 de zile} \dots\dots\dots 1,5 \text{ p}$$

$$\text{În 60 de ore cei trei pui ar consuma 18 de antilopi} \dots\dots\dots 1,5 \text{ p}$$

$$\text{Familia de lei în 60 de ore ar consuma 53 de antilopi} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Rezultă că prânzul familiei de lei durează 60:53 ore, adică 1 oră și 8 minute} \dots\dots\dots 1,5 \text{ p}$$

3. Primul și al 2020-lea număr dintr-o succesiune de 2020 numere naturale consecutive sunt direct proporționale cu numerele 0,1(3) și 0,2. Determinați al 105-lea număr.

Rezolvare

$$\text{Se notează șirul de numere cu } x, x+1, x+2, \dots, x+2013 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$0,1(3) = \frac{2}{15} \text{ și } 0,2 = \frac{1}{5} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\frac{x}{\frac{2}{15}} = \frac{x+2013}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{1}{5}x = \frac{2}{15} \cdot (x+2013) \Rightarrow x=4026 \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

$$\text{Al 105-lea număr este } 4026+104=4130 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

4. În interiorul unghiului AOB luăm punctele C și D precum și semidreptele OC și OD. Astfel se formează mai multe unghiuri. Măsura unghiului AOB este 120° , OC și OD sunt bisectoarele unor unghiuri. Aflați măsura unghiului AOC.

Rezolvare

Cazul I. OD este biseectoarea unghiului AOD

a) OC este biseectoarea unghiului AOD $\Rightarrow m(\angle AOC) = 30^\circ \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

- b) OC este bisectoarea unghiului BOD $\Rightarrow m(\angle AOC) = 90^\circ$ **2 p**
- Cazul II. OC este bisectoarea unghiului AOD $\Rightarrow m(\angle AOC) = 60^\circ$ **1 p**
- Cazul III. OC și OD împart unghiul în trei părți egale
- a) $\Rightarrow m(\angle AOC) = 40^\circ$ **2 p**
- b) $\Rightarrow m(\angle AOC) = 80^\circ$ **2 p**