



S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a + b = t \neq 0$ și $ab = cd$. Se consideră mulțimea:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{t} \right\} \right\}. \text{ Arătați că:}$$

a) $(M, \cdot)$ este grup abelian.

b) $(M, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(G, *)$ unde $G = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{t} \right\}$ și $x * y = x + y + txy$.

Soluție:

a) Fie $M(x) = \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{t} \right\}$. Se verifică prin calcul direct:

$$M(x) \cdot M(y) = M(txy + x + y) = M\left(t\left(x + \frac{1}{t}\right)\left(y + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right)(1), \forall x, y \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{t} \right\}$$

și $\left(x + \frac{1}{t}\right)\left(y + \frac{1}{t}\right) \neq 0 \Leftrightarrow txy + x + y \neq -\frac{1}{t}$, se deduce astfel partea stabilă. (1,5p)

- Asociativitatea (0,5p)

- Comutativitatea (0,5p)

- Element neutru $E = M(0)$ (0,5p)

- $(M(x))^{-1} = M\left(-\frac{x}{tx+1}\right) \in M$. (1p)

b) Se alege $f: G \rightarrow M$, $f(x) = M\left(\frac{x-1}{t}\right)$ și cu (1) se arată că (1p)

i) $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in G$ (1p)

ii) f bijectivă. (1p)

SUBIECTUL II Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} (tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x) dx, n \geq 1.$$



Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n^2]{n I_n} - 1 \right)$.

Soluție:

Avem

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x \operatorname{tg} x)^{n-1} e^x (1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x) dx = \dots\dots\dots (2p)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x \operatorname{tg} x)^{n-1} (e^x \operatorname{tg} x)' dx = \frac{1}{n} (e^x \operatorname{tg} x)^n \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n} e^{\frac{n\pi}{4}} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Atunci } n \left(\sqrt[n^2]{n I_n} - 1 \right) = n \left(e^{\frac{\pi}{4n}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4n}} - 1}{\frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Deci limita cerută este } \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots (1p)$$

SUBIECTUL III Fie I, J intervale și $f: I \rightarrow \mathbf{R}^*$ o funcție cu primitiva $F: I \rightarrow \mathbf{R}$ bijectivă.

a) Să se calculeze $\int \frac{F^{-1}(x)}{f(F^{-1}(x))} dx, x \in J$.

b) Să se calculeze $\int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, x \in \mathbf{R}$.

Soluție:

a) Din F bijectivă $\Rightarrow F(F^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$.

Prin derivare obținem

$$F'(F^{-1}(x)) \cdot (F^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J \Leftrightarrow (F^{-1})'(x) = \frac{1}{f(F^{-1}(x))}, x \in J \quad (2p)$$

și astfel

$$\left(\frac{1}{2} (F^{-1}(x))^2 \right)' = F^{-1}(x) \cdot (F^{-1}(x))' = F^{-1}(x) \frac{1}{f(F^{-1}(x))}, x \in J, \quad (2p)$$

$$\text{deci: } \int \frac{F^{-1}(x)}{f(F^{-1}(x))} dx = \frac{1}{2} (F^{-1}(x))^2 + C, x \in J. \quad (1p)$$

b) **Metoda I:**

$$\int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \frac{1}{2} \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

(2p)

Metoda II: Fie $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ și $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Avem

$$F' = f, F \text{ bijectivă și cum } F^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(F^{-1}(x)) = \sqrt{x^2 + 1},$$

$$\text{deci } \int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{F^{-1}(x)}{f(F^{-1}(x))} dx = \frac{1}{2} \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C. \quad (2p)$$

SUBIECTUL IV Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in A$, astfel încât $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ și $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

Să se arate că $(a+b)^n = a^n + b^n$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 4$. (G.M.)

Soluție:

Din $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ rezultă că $ab = -ba$, deci $ab^2 = abb = -bab = b^2a$.

.....(1p)

Cum $a^3 + b^3 = (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + b^2) = a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3$, rezultă că $ab^2 = -ba^2$. Arătăm prin inducție că $a^n b = -b^n a$. Proprietatea este adevărată pentru $n=1$ și $n=2$.

Avem $a^{n+1}b = a^n(ab) = -a^nba = b^na^2 = b^{n-1}ba^2 = -b^{n-1}ab^2 = -b^{n-1}b^2a = -b^{n+1}a$.

.....(3)

Arătăm prin inducție că $(a+b)^n = a^n + b^n$. Proprietatea este adevărată pentru $n \in \{1, 2, 3\}$.

Presupunem adevărată pentru n . Atunci

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a^n + b^n)(a+b) = a^{n+1} + a^n b + b^n a + b^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1}$$

.....(3p)

Ceea ce trebuia demonstrat.

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem