

Inspectoratul Școlar Județean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 16 februarie 2014

Problema 1.

Fie $f : A \rightarrow B$ și A_0, B_0 două mulțimi astfel încât $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$.
Definind $f^{-1}(B_0) = \{x \in A \mid f(x) \in B_0\}$, arătați că au loc următoarele:

- i) $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$, cu egalitate atunci când f este injectivă.
- ii) $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$, cu egalitate atunci când f este surjectivă.

Problema 2.

Fie x, y, z numere reale astfel încât $\frac{xyz}{x+y} = -1$, $\frac{xyz}{y+z} = 1$ și $\frac{xyz}{x+z} = a$, unde $a > \frac{1}{2}$ este un număr real. Determinați produsul xyz .

G. M. 26736

Problema 3.

Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ astfel încât identitatea de mai jos să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(2 - \cos a - \sqrt{3} \sin a\right)^{\frac{x}{2}} + \left(2 - \cos a + \sqrt{3} \sin a\right)^{\frac{x}{2}} = 2|1 - 2 \cos a|^{\frac{x}{2}}.$$

Problema 4.

Fie z un număr complex cu proprietatea că $|z + 1| \geq 2$. Demonstrați că $|z^3 + 1| \geq 1$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7;

Timp de lucru: 3 ore.