OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A V -A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Suma a două numere naturale este 24. Care este cea mai mare valoare posibilă a produsului lor?

Soluție:

Notăm numerele cu a și b și $a+b=24$ 1p
Avem: $0+24=1+23=2+22=...=22+2=23+1=24+0$ 1p
Cazurile distincte sunt: 4p

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
ab	0	23	44	63	80	95	108	119	128	135	140	143	144

Valoarea maximă a produsului este 144. ....1p

2. Se consideră numerele naturale:

$$a=10^{2019}-9\cdot 10^{2018}-9\cdot 10^{2017}-...-9\cdot 10^{86}$$
$$b=5^9\cdot 25^2\cdot 125^5\cdot 625^{14}\cdot\left(2^{87}+2^{86}+2^{85}+2^{84}\right)$$

a) Să se compare numerele a și b.
b) Să se determine numărul cifrelor diferite ale numărului $n=\left(a+b\right)^3$.
c) Să se afle restul împărțirii lui a la b.

Soluție:

a) $a=10^{2019}-9\left(10^{2018}+10^{2017}+...+10^{86}\right)=10^{2019}-\left(10^{2019}-10^{86}\right)$ 1p
$a=10^{2019}-10^{2019}+10^{86}=10^{86}=10^2\cdot 10^{84}=100\cdot 10^{84}\quad(1)$ 0,5p
$b=5^9\cdot 5^4\cdot 5^{15}\cdot 5^{56}\cdot 2^{84}\cdot\left(2^3+2^2+2+1\right)$ 0,5p
$b=5^{84}\cdot 2^{84}\cdot 15=15\cdot 10^{84}\quad(2)$ 0,5p
Din (1) și (2) avem $a>b$ $(100>15)$ ………………..0,5p

b) $n=\left(a+b\right)^3=\left(100\cdot 10^{84}+15\cdot 10^{84}\right)^3=\left(115\cdot 10^{84}\right)^3$ 1p
$n=1520875\cdot 10^{252}$ 0,5p

În scrierea lui n există 6 cifre diferite (1, 5, 2, 0, 8, 7) 0,5p

c) $a=100\cdot 10^{84}=6\cdot 15\cdot 10^{84}+10\cdot 10^{84}=6b+10^{85}$ 1p
$0<10^{85}=10\cdot 10^{84}<15\cdot 10^{84}=b$ 0,5p
Restul împărțirii lui a la b este 10^{85} 0,5p

3. Împărțind suma a două numere naturale la treimea diferenței lor se obține câtul 4 și restul 15. Să se afle cele două numere, știind că că unul dintre ele este cu 2019 mai mare decât celălalt.

Soluție:

Notăm numerele cu a și b.
$a+b=4\left[(a-b):3\right]+15, 0\leq 15<(a-b):3 \quad (1)$ …………………………2p
Dar $a=b+2019\Rightarrow a-b=2019 \quad (2)$ …………………………………..1p
Din (1) și (2) obținem: $a+b=4\cdot 2019:3+15, 0\leq 15<2019:3$ 1p
$a+b=4\cdot 673+15\Rightarrow a+b=2707 \quad (3)$ 1p
Din (2) și (3) obținem: $a=2363, b=344$ 2p

4. Suma a 15 numere naturale consecutive este un număr cu cifre diferite, printre care se află cifrele 0, 1, 2 și 4. Care este cel mai mic număr posibil dintre cele 15 numere?

Soluție:

Notăm numerele cu a, a+1, a+2, ..., a+14.
$S=a+(a+1)+(a+2)+...+(a+14)=15a+(1+2+...+14) \quad (1)$ 1p
$A=(1+2+...+14)=\left[(1+14)\cdot 14\right]:2=15\cdot 7 \quad (2)$ 1p
Din (1) și (2) obținem: $S=15(a+7) \quad (3)$ 1p
Din $(3)\Rightarrow S\,\vdots\,3\Rightarrow$ suma cifrelor lui S este multiplu de 3 (4) 1p
Dar a e minim $\Rightarrow$ S e minim și $0+1+2+4=7\xrightarrow{(4)}S=10245 \quad (5)$ 1p
Din (3) și (5) obținem: $15(a+7)=10245$ 1p
$a+7=683\Rightarrow a=676$ 1p
Concluzie: cel mai mic număr căutat este 676.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A VI -A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Se consideră mulțimile $A = \{12 \cdot m + 5 \mid m \in N\}$ și $B = \{18 \cdot p + 11 \mid p \in N\}$.

a) Arătați că numărul $101 \in A \cap B$.

b) Arătați că $10^n + 1 \in A \cap B$, pentru orice $n \in N, n \geq 2$.

Soluție:

a) Avem $101 = 12 \cdot 8 + 5 \in A$ și $101 = 18 \cdot 5 + 11 \in B$ de unde deducem $101 \in A \cap B$.

b) Fie $x \in A \cap B$. Avem $x = 12 \cdot m + 5$ și $x = 18 \cdot p + 11$. Adunând 7 la fiecare egalitate obținem:

$$x + 7 = 12 \cdot m + 12 = 12 \cdot (m + 1) = \mathcal{M}_{12}, \quad (1)$$

$$x + 7 = 18 \cdot p + 18 = 18 \cdot (p + 1) = \mathcal{M}_{18}, \quad (2)$$

Cum $[12, 18] = 36$ avem că $x + 7 = \mathcal{M}_{36}$ de unde obținem $x = \mathcal{M}_{36} - 7$, (3).

Scriem $10^n + 1 = 10^n + 8 - 7$. Deoarece $10^n + 8 \vdots 9$ și $10^n + 8 \vdots 4$ pentru orice $n \in N, n \geq 2$ și $(4, 9) = 1$ avem $10^n + 8 \vdots 36$, adică $10^n + 8 = \mathcal{M}_{36}$ de unde se obține

$$10^n + 1 = \mathcal{M}_{36} - 7, \ (4).$$

Din (3) și (4) avem că $10^n + 1 \in A \cap B$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Deduce că $101 = 12 \cdot 8 + 5 \in A$ și $101 = 18 \cdot 5 + 11 \in B$ de unde se obține că $101 \in A \cap B$	2p
b) Deduce $x = \mathcal{M}_{36} - 7$	2p
Scrie $10^n + 1 = 10^n + 8 - 7$	1p
Argumentează că $10^n + 8 = \mathcal{M}_{36}$	1p
Finalizare: $10^n + 1 = \mathcal{M}_{36} - 7$ de unde se obține $10^n + 1 \in A \cap B$	1p

2. a) Fie numărul natural $A = (1 + 2 + 3 + ... + 999) \cdot n + 1000$. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul A este divizibil cu 10^6 .

b) Aflați perechile de numere naturale care au produsul 2400 și $c.m.m.d.c$ este 10.

Soluție:

a) Din suma lui Gauss avem

$$A = \frac{999 \cdot 1000}{2} \cdot n + 1000 = 999 \cdot 500 \cdot n + 1000 = 500 \cdot (999 \cdot n + 2)$$

Cum $A \vdots 10^6$ și A este minim avem $500 \cdot (999 \cdot n + 2) = 10^6 \Leftrightarrow 999 \cdot n + 2 = 2000$ de unde avem $n = 2$.

b) Fie a și b cele două numere naturale. Din $(a,b) = 10$ avem $a = 10 \cdot k$ și $b = 10 \cdot p$, unde $(k, p) = 1$ și $k, p \in \mathbb{N}^*$. Cum $a \cdot b = 2400$ avem $k \cdot p = 24$, $(k, p) = 1$ și $k, p \in \mathbb{N}^*$, de unde distingem următoarele cazuri:

1) $k = 1$ și $p = 24$ de unde avem $a = 10$ și $b = 240$;
2) $k = 24$ și $p = 1$ de unde avem $a = 240$ și $b = 10$;
3) $k = 3$ și $p = 8$ de unde avem $a = 30$ și $b = 80$;
4) $k = 8$ și $p = 3$ de unde avem $a = 80$ și $b = 30$;

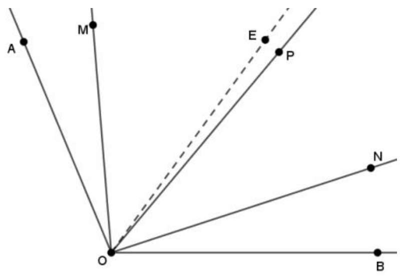
Avem că $(a,b) \in \{(10, 240), (240, 10), (30, 80), (80,30)\}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Calculează $A = 500 \cdot (999 \cdot n + 2)$ ………………………………………...	1p
Precizează că $A \vdots 10^6$, A este minim și deduce că $n = 2$ ………………………..…	2p
b) Din $(a,b) = 10$ avem $a = 10 \cdot k$ și $b = 10 \cdot p$, unde $(k, p) = 1$ și $k, p \in \mathbb{N}^*$ deduce că $k \cdot p = 24$ ………………………………………………………..	1p
Discută fiecare caz posibil ………………………………………………………	2p
Precizează perechile $(10, 240)$, $(240, 10)$, $(30, 80)$, $(80,30)$ …………………..……	1p

3. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ având măsura de 108^0, considerăm punctul P și notăm cu $a = m(\sphericalangle AOP)$, $b = m(\sphericalangle BOP)$.

a) Aflați a și b, dacă $17 \cdot a - 19 \cdot b = 18^0$.

b) Fie $M \in Int(\sphericalangle AOP)$, $N \in Int(\sphericalangle POB)$ astfel încât $m(\sphericalangle BOM) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOM)$, $m(\sphericalangle BON) = \frac{1}{5} \cdot m(\sphericalangle AON)$. Arătați că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ au aceeași bisectoare.



Soluție:

a) Din faptul că P este un punct interior $\sphericalangle AOB$ avem $m(\sphericalangle AOP) + m(\sphericalangle BOP) = m(\sphericalangle AOB)$ de unde deducem că $a + b = 108^0$, (1). Cum $17 \cdot a - 19 \cdot b = 18^0$ avem că

$$18 \cdot a - a - 18 \cdot b - b = 18^0 \Leftrightarrow 18 \cdot (a - b) = 18^0 + a + b,$$

de unde deducem $a - b = 7^0$, (2). Adunând relațiile (1) și (2), membru cu membru, obținem $2 \cdot a = 115^0 \Longrightarrow a = 57^0 30'$ și $b = 108^0 - 57^0 30' = 50^0 30'$.

b) Notăm $m(\sphericalangle AOM) = x$. Din $m(\sphericalangle BOM) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOM) = 5 \cdot x$ și $M \in Int(\sphericalangle AOP)$ avem $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle BOM) = x + 5 \cdot x = 6 \cdot x$. Rezultă că $6 \cdot x = 108^0$, adică $x = 18^0$ de unde $m(\sphericalangle AOM) = 18^0$.

Notăm $m(\sphericalangle BON) = y$. Din $m(\sphericalangle BON) = \frac{1}{5} \cdot m(\sphericalangle AON) \Leftrightarrow 5 \cdot m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle AON)$, adică $m(\sphericalangle AON) = 5 \cdot y$ și cum $N \in Int(\sphericalangle POB)$ avem

$$m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AON) + m(\sphericalangle BON) = 5 \cdot y + y = 6 \cdot y$$

Rezultă că $6 \cdot y = 108^0$, adică $y = 18^0$ de unde $m(\sphericalangle BON) = 18^0$.

Fie $[OE$ bisectoare $\sphericalangle AOB$. Avem că $m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle EOB) = m(\sphericalangle AOB):2 = 54^0$.

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle MOE) = m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle AOM) = 54^0 - 18^0 = 36^0 \\ m(\sphericalangle NOE) = m(\sphericalangle BOE) - m(\sphericalangle BON) = 54^0 - 18^0 = 36^0 \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle MOE) = m(\sphericalangle NOE).$$

Avem că $E \in Int(\sphericalangle MON)$ și $\sphericalangle MOE \equiv \sphericalangle NOE$ de unde rezultă că $[OE$ este bisectoarea $\sphericalangle MON$. Deducem că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ au aceeași bisectoare.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei …………………………………………………	1p
a) Deduce relațiile $a+b= 108^0$ și $a-b=7^0$ …………………………………	1p
Determină $a=57^0 30'$ și $b=50^0 30'$ ………………………………………....	1p
b) Deduce $m(\sphericalangle AOM)=18^0$ …………………………………………………	1p
Deduce $m(\sphericalangle BON)=18^0$ ……………………………………………………….	1p
Argumentează că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle MON$ au aceeași bisectoare …………………………	2p

4. Se consideră unghiurile AOB, BOC și BOD astfel încât $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt neadiacente complementare. Dacă $m(\sphericalangle COD)=135^0$, determinați măsura $\sphericalangle AOB$.

Soluție:

Fie $m(\sphericalangle AOB)=a$, $m(\sphericalangle BOC)=b$ și $m(\sphericalangle BOD)=c$.

Din faptul că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, avem

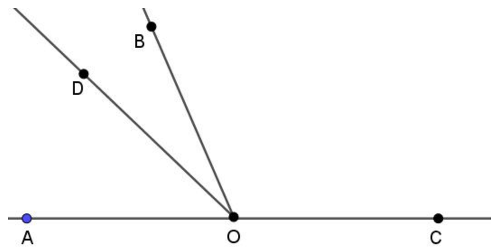
$$m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)=a+b=180^0, (1).$$

Din faptul că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt neadiacente complementare avem

$$m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOD)=a+c=90^0, (2)$$

și că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt ascuțite ($<90^0$).

Se disting două cazuri:



Cazul I: [OD este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOB$

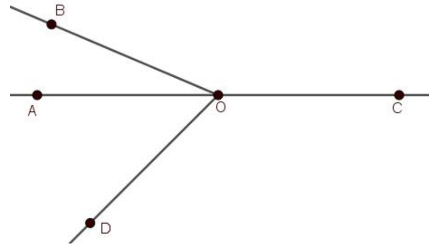
Avem $m(\sphericalangle AOB)\geq m(\sphericalangle BOD)$, adică $a\geq c$.

Din (1) și (2), prin scădere, obținem

$$(a+b)-(a+c)=b-c=90^0, (3).$$

Cum $m(\sphericalangle COD)=m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle BOD)=135^0$ avem $b+c=135^0$, (4).

Din (3) și (4) , prin adunare membru cu membru, obținem $2\cdot b=225^0 \Longrightarrow b=112^0 30'$, iar din (1) avem că $a=180^0-112^0 30'=67^0 30'$. În concluzie $m(\sphericalangle AOB)=67^0 30'$.



Cazul II: [OA este inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$

Avem $m(\sphericalangle BOD)\geq m(\sphericalangle AOB)$, adică $c\geq a$.

$$m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle AOC)=180^0 \text{ de unde}$$

$$m(\sphericalangle AOD)=m(\sphericalangle AOC)-m(\sphericalangle COD)=180^0-135^0=45^0$$

Cum $m(\sphericalangle AOD)=m(\sphericalangle BOD)-m(\sphericalangle AOB)=c-a$ avem că

$c - a = 45^0$, (5).

Din (2) și (5), prin adunare membru cu membru, obținem $2 \cdot c = 135^0 \Longrightarrow c = 67^0 30'$ de unde $a = 90^0 - 67^0 30' = 22^0 30'$. În concluzie $m(\sphericalangle AOB) = 22^0 30'$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Figurile corespunzătoare celor două cazuri ale problemei	1p
Notează $m(\sphericalangle AOB) = a$, $m(\sphericalangle BOC) = b$ și $m(\sphericalangle BOD) = c$, deduce relațiile $a + b = 180^0$, (1) și $a + c = 90^0$, (2) precizând că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt ascuțite	1p
Cazul I: $[OD$ este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOB$ Din (1) și (2), prin scădere, obținem $b - c = 90^0$, (3)	1p
Deduce $b + c = 135^0$, (4)...	1p
$m(\sphericalangle AOB) = 67^0 30'$	1p
Cazul II: $[OA$ este inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$ Deduce $m(\sphericalangle AOD) = 45^0$ și argumentează că $c - a = 45^0$	1p
Deduce $m(\sphericalangle AOB) = 22^0 30'$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A VII -A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

1. Arătați că $\left(\frac{7}{1}+1\right)\left(\frac{7}{2}+1\right)\left(\frac{7}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{7}{9}+1\right)=\left(\frac{9}{1}+1\right)\left(\frac{9}{2}+1\right)\left(\frac{9}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{9}{7}+1\right)$.

Soluţie :

$$\left(\frac{7}{1}+1\right)\left(\frac{7}{2}+1\right)\left(\frac{7}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{7}{9}+1\right)=\frac{8}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{12}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{16}{9}$$

$$\left(\frac{9}{1}+1\right)\left(\frac{9}{2}+1\right)\left(\frac{9}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{9}{7}+1\right)=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{16}{7}$$

Simplificând primul şir cu 8 şi 9 se obţine al doilea şir.

Barem

- Face calculul în paranteze și aduce membrul stâng la forma

  $\frac{8}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{12}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{16}{9}$ 3p

- Simplifică membrul stâng până ajunge la forma

  $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{16}{7}$ 1p

- Aduce membrul drept la forma

  $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{16}{7}$ 3p

2. Pe prelungirea laturii CD a paralelogramului ABCD se ia punctul P astfel încât CD=2·DP. Notăm BD∩AP={M}, BC∩PA={N}, DN∩AB={G}.Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului MBN.

Soluţie :

Avem : CD = 2 · DP $\Rightarrow$ DP = $\frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$ și PD ‖ AB $\Rightarrow$ în triunghiul ABM , PD linie mijlocie

$\Rightarrow$ AP=PM şi BD=DM $\Rightarrow$ ND mediană în triunghiul BMN.

Avem : BD = DM și AD ‖ BN $\Rightarrow$ AD linie mijlocie în triunghiul BMN $\Rightarrow$ AN=AM $\Rightarrow$

AB mediană în triunghiul BMN .

Cum AB şi DN sunt mediane, AB$\cap$DN={G} $\Rightarrow$ G este centrul de greutate în triunghiul BMN.

Barem

Desen 1p

Avem : DP=$\frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$ și PD ‖ AB $\Rightarrow$ în triunghiul ABM , PD linie mijlocie $\Rightarrow$ AP=PM şi

BD=DM $\Rightarrow$ ND mediană în triunghiul BMN 2,5p

Avem : BD = DM și AD ‖ BN $\Rightarrow$ AD linie mijlocie în triunghiul BMN $\Rightarrow$ AN=AM $\Rightarrow$

AB mediană în triunghiul BMN 2,5p

Cum AB$\cap$DN={G} $\Rightarrow$ G este centrul de greutate în triunghiul BMN 1p

3. a) Demonstrați că $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{2018^2} < 1$

   b) Arătați că oricare ar fi n, număr rațional pozitiv, astfel încât

   $\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \ldots + \frac{2018}{n+2018} = 2017$, atunci $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+2018} = \frac{1}{n}$.

Soluţie :

a) $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

....

$\frac{1}{2018^2} < \frac{1}{2017\cdot 2018} = \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2018^2}<1-\frac{1}{2018}<1$

b) $\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\ldots+\frac{2018}{n+2018}=2017$

$\frac{n+1-n}{n+1}+\frac{n+2-n}{n+2}+\ldots+\frac{n+2018-n}{n+2018}=2017$

$1-\frac{n}{n+1}+1-\frac{n}{n+2}+1-\frac{n}{n+3}+1-\frac{n}{n+4}+\ldots+1-\frac{n}{n+2018}=2017$

$2018-n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{n+2018}\right)=2017$

Finalizare $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+2018}=\frac{1}{n}$

Barem : $a)$ $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

....

$\frac{1}{2018^2}<\frac{1}{2017\cdot 2018}=\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2018^2}<1-\frac{1}{2018}<1$ ....3 p

b) $\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\ldots+\frac{2018}{n+2018}=2017$

$\frac{n+1-n}{n+1}+\frac{n+2-n}{n+2}+\ldots+\frac{n+2018-n}{n+2018}=2017$.....................................$1p$

$1-\frac{n}{n+1}+1-\frac{n}{n+2}+1-\frac{n}{n+3}+1-\frac{n}{n+4}+\ldots+1-\frac{n}{n+2018}$ 1p

$2018-n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{n+2018}\right)=2017$ 1p

Finalizare $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+2018}=\frac{1}{n}$ 1p

4. În triunghiul ABC, AB=AC, $m(\widehat{A})=40^0$, considerăm $D\in(AC)$ astfel încât $m(\widehat{ABD})=60^0$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în E, iar T, aparține bisectoarei unghiului A, astfel încât $E\in(AT)$ și ET=AB. Arătați că ABTC este romb.

Soluţie :

În triunghiul ABC isoscel , AE bisectoare ⇒ AE înălțime și mediană, AE⊥BC și

m$(\widehat{BAC}) = 40^0$, m$(\widehat{ABC}) = 70^0$

Fie F∈(ET) astfel încât m$(\widehat{FBC}) = 10^0$. În triunghiul ABF , m$(\widehat{ABF}) =$
$70^0 + 10^0 = 80^0$ ⇒ Δ ABF isoscel, cu AB=AF (1)

În Δ BEF : m$(\widehat{FBE})$ = m(EBC) + m$(\widehat{FBC}) = 10^0 + 10^0 = 20^0$, dar EF⊥BC ⇒

ΔBEF isoscel ⇒BE=BF , m$(\widehat{BEF}) = 80^0$

ΔABF≡ΔTEB (LUL) $\begin{cases} AB = ET \\ BF = BE \\ \text{m}(\widehat{FBA}) = \text{m}(\widehat{BET}) = 80^0 \end{cases}$ ⇒ BT=AF (2)

Din (1)+(2)⇒ BT=AB (3)

În ΔABC isoscel, AE bisectoatea $(\widehat{A})$⇒ AE mediatoatea (BC), T∈AE⇒ TB=TC

Din AB=AC, din (3) și TB=TC ⇒ABTC romb

Barem :

În triunghiul ABC isoscel , AE bisectoare ⇒ AE înălțime și mediană, AE⊥BC și

m$(\widehat{BAC}) = 40^0$, m$(\widehat{ABC}) = 70^0$ 1p

Fie F∈(ET) astfel încât m$(\widehat{FBC}) = 10^0$. În triunghiul ABF , m$(\widehat{ABF}) =$
$70^0 + 10^0 = 80^0$ ⇒ Δ ABF isoscel, cu AB=AF (1) 1p

În Δ BEF : m$(\widehat{FBE})$ = m(EBC) + m$(\widehat{FBC}) = 10^0 + 10^0 = 20^0$, dar EF⊥BC ⇒

ΔBEF isoscel ⇒BE=BF , m$(\widehat{BEF}) = 80^0$ ....1 p

ΔABF≡ΔTEB (LUL) $\begin{cases} AB = ET \\ BF = BE \\ \text{m}(\widehat{FBA}) = \text{m}(\widehat{BET}) = 80^0 \end{cases}$ ⇒ BT=AF (2)......................1 p

Din (1)+(2)⇒ BT=AB (3).. 1p

În ΔABC isoscel, AE bisectoatea $(\widehat{A})$⇒ AE mediatoatea (BC), T∈AE ⇒

TB=TC.. ....1 p

Din AB=AC, din (3) și TB=TC ⇒ABTC romb...1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

CLASA A VIII -A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

Subiectul 1.

a) Dacă $x, y \in R$ astfel încât $-2 \le x \le 3$ și $x - 5y + 2 = 0$, calculați

$$E = \sqrt{(x+2)^2 + 2y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 2(y-1)^2}.$$

b) Arătați că dacă $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, atunci $x \in [-1, 5]$ și $y \in [0, 6]$.

Soluție:

a) Avem $x = 5y - 2$ și $-2 \le x \le 3$ de unde

$$-2 \le 5y - 2 \le 3 \quad |^{+2} \Leftrightarrow 0 \le 5y \le 5 \quad |^{:5} \Leftrightarrow 0 \le y \le 1 \Rightarrow y \in [0, 1]$$

Folosind substituția făcută $x = 5y - 2$ obținem

$$E = \sqrt{(5y-2+2)^2 + 2y^2} + \sqrt{(5y-2-3)^2 + 2(y-1)^2}$$
$$= \sqrt{25y^2 + 2y^2} + \sqrt{(5y-5)^2 + 2(y-1)^2} = \sqrt{27y^2} + \sqrt{25(y-1)^2 + 2(y-1)^2}$$
$$= \sqrt{27y^2} + \sqrt{27(y-1)^2} = \sqrt{27} \cdot |y| + \sqrt{27} \cdot |y-1| = 3\sqrt{3} \cdot (|y| + |y-1|).$$

Cum $0 \le y \le 1$ și $-1 \le y - 1 \le 0$ se obține $E = 3\sqrt{3}$.

b) Avem

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 \le 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} \le 3 \Leftrightarrow |x-2| \le 3$$
$$\Leftrightarrow -3 \le x - 2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 5 \Leftrightarrow x \in [-1, 5]$$

Analog avem

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \Rightarrow (y-3)^2 \le 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{(y-3)^2} \le 3 \Leftrightarrow |y-3| \le 3$$
$$\Leftrightarrow -3 \le y - 3 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le y \le 6 \Leftrightarrow y \in [0, 6].$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Observă substituția $x = 5y - 2$ și deduce că $y \in [0, 1]$ ………………………....	1p
Argumentează că $E = \sqrt{27y^2} + \sqrt{27(y-1)^2} = 3\sqrt{3} \cdot (\|y\| + \|y-1\|)$ …………....	2p
Finalizare: $E = 3\sqrt{3}$ ……………………………………………………………….	1p
b) Observă că $(x-2)^2 \le 3^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} \le 3$ …………………………………	1p
Argumentează că $x \in [-1, 5]$ ……………………………………………………..	1p
Analog demonstrează că $y \in [0, 6]$ ………………………………………………	1p

Subiectul 2

Se consideră numerele:

$$A = (\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{4}+\sqrt{3})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}) \text{ și}$$

$$B = (\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{4}-\sqrt{3})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}).$$

a) Să se calculeze $A\cdot B$ și să se arate că $A+B>2$.

b) Să se calculeze $\left[\frac{B}{1010\cdot A}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Soluție:

a) $A\cdot B = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2019}-\sqrt{2018})(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}) = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1.$

Din inegalitatea mediilor știm că $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}$, pentru orice $a\geq 0$ și $b\geq 0$, egalitatea are loc pentru $a=b$; Deducem că $A+B\geq 2\sqrt{A\cdot B} = 2\sqrt{1} = 2$.

$B = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})}\cdot\ldots\cdot\frac{(\sqrt{2019}+\sqrt{2018})}{(\sqrt{2018}+\sqrt{2017})}$ și cum $\frac{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}>1$, pentru $k\in\mathbb{N}^*$ rezultă că $B>1$ și cum $A\cdot B=1$ avem $A\neq B$ de unde rezultă că $A+B>2$.

b) Din $A\cdot B=1$ avem $\frac{B}{A}=B^2=\left[\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})}\cdot\ldots\cdot\frac{(\sqrt{2019}+\sqrt{2018})}{(\sqrt{2018}+\sqrt{2017})}\right]^2$.

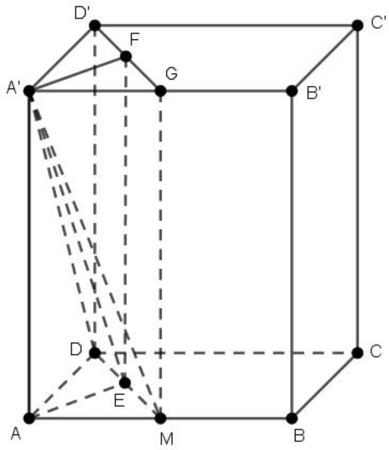
Din $\frac{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k})}{(\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1})}<\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$, pentru $k\in\mathbb{N}^*$ avem $\frac{B}{A}<\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{1010}}{\sqrt{1009}}\right)^2=\left(\sqrt{1010}\right)^2$

de unde se obține $\left[\frac{B}{1010\cdot A}\right]=0$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Determină $A\cdot B=1$ ………………………………………………………......	1p
Din inegalitatea mediilor deduce că $A+B\geq 2$ ……………………………………	1p
Scrie $B=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})}\cdot\ldots\cdot\frac{(\sqrt{2019}+\sqrt{2018})}{(\sqrt{2018}+\sqrt{2017})}$ și argumentează că $B>1$...	1p
Argumentează că $A+B>2$ ………………………………………………………..	1p
b) Deduce că $\frac{B}{A}=B^2$ și demonstrează că $\frac{B}{A}<\left(\sqrt{1010}\right)^2$ …………………………	2p
Finalizare: $\left[\frac{B}{1010\cdot A}\right]=0$ …………………………......…...........................……	1p

Subiectul 3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD\,A'B'C'D'$ cu $AA' = 3\sqrt{5}\ cm$, $AB = 6\ cm$ și $BC = 3\ cm$ notăm cu M mijlocul segmentului AB. Aflați tangenta unghiului determinat de planele $A'DM$ și $D'DM$.

Soluție: Avem $(A'DM) \cap (D'DM) = DM$, (1).



$$\left.\begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AE \perp DM,\ E \in DM \\ AE, DM \subset (ABC) \\ AE \cap DM = \{E\} \end{array}\right\} \overset{T_{3\perp}}{\Rightarrow} A'E \perp DM, \ (2).$$

Dacă punctul G este mijlocul segmentului $A'B'$, atunci $G \in (D'DM)$. Cum $AM = MB = 3cm$, ΔADM este isoscel și $AE \perp DM$ rezultă că punctul E este mijlocul segmentului DM.

Dacă punctul F este mijlocul segmentului $D'G$, atunci $EF \parallel D'D$ și cum $D'D \perp (ABC)$ rezultă $EF \perp (ABC)$.

Dar $DM \subset (ABC)$ și atunci $EF \perp DM$, (3). Din (1) , (2) și (3) avem

$$\left.\begin{array}{l} (A'DM) \cap (D'DM) = DM \\ A'E \perp DM,\ A'E \subset (A'DM) \\ EF \perp DM,\ EF \subset (D'DM) \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\sphericalangle\left((A'DM),(D'DM)\right)\right) = m\left(\sphericalangle\left(A'E, EF\right)\right) = m\left(\sphericalangle A'EF\right) = a$$

În $\Delta A'EF$, dreptunghic în F, avem $EF = AA' = 3\sqrt{5}\ cm$ și $A'F = \dfrac{A'D' \cdot A'G}{D'G} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ cm$ (din triunghiul dreptunghic $A'D'G$). Obținem $tga = \dfrac{A'F}{EF} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei ……………………………………………………	1p
Aplică teorema celor trei perpendiculare și obține $A'E \perp DM$ ………………………..	2p
Construiește punctul F mijlocul segmentului $D'G$ și demonstrează $EF \perp DM$ ……...	1p
Demonstrează că $m\left(\sphericalangle\left((A'DM),(D'DM)\right)\right) = m\left(\sphericalangle\left(A'E, EF\right)\right) = m\left(\sphericalangle A'EF\right) = a$ …...	1p
Finalizare: $tga = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ …………………………………………………...……………	2p

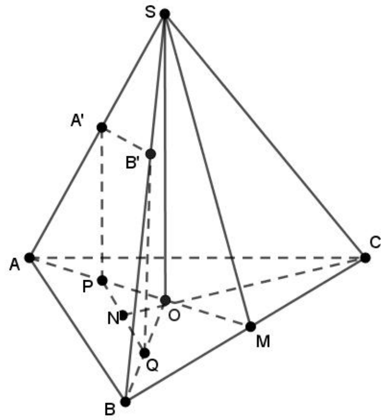
Subiectul 4. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC. Punctul M este mijlocul muchiei BC, măsura unghiului dintre dreptele SM și SA este egală cu 90^0 și $SA = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Arătați că triunghiul SAC este dreptunghic.

b) Fie A', B' mijloacele muchiilor SA, respectiv SB, iar P și Q proiecțiile punctelor A' și respectiv B' pe planul (ABC). Calculați aria triunghiului CPQ.

Soluție:

a) Notăm $AB = AC = BC = x$, avem $SA = SB = SC = 6\sqrt{2}$, respectiv $BM = MC = \frac{x}{2}$.
În ΔSBC isoscel, SM mediană de unde SM este înălțime, respectiv în ΔABC echilateral, AM mediană de unde avem AM înălțime, $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.



Din teorema lui Pitagora în ΔSMC, dreptunghic în M, obținem

$$SM^2 = SC^2 - MC^2 = 72 - \frac{x^2}{4}, (1).$$

Din teorema lui Pitagora în ΔSMA, dreptunghic în S, obținem

$$SM^2 = AM^2 - SA^2 = \frac{3x^2}{4} - 72, (2).$$

Din (1) și (2) avem $72 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} - 72 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow x = 12$ cm.

Aplicând reciproca teoremei lui Pitagora în ΔSAC, avem $AC^2 = SA^2 + SC^2$, de unde se deduce că ΔSAC este dreptunghic.

b) Avem $A'P \perp (ABC)$, $B'Q \perp (ABC)$, $SO \perp (ABC)$ se unde rezultă că $A'P \parallel B'Q \parallel SO$. Avem $(A'P)$ linie mijlocie în ΔSAO, rezultă P este mijlocul $[AO]$, respectiv $(B'Q)$ linie mijlocie în ΔSBO, rezultă Q este mijlocul $[BO]$, de unde avem $A'P = B'Q = \frac{SO}{2}$.

Din $A'P \parallel B'Q$ și $A'P = B'Q$ rezultă $A'B'QP$ este paralelogram și $PQ = A'B' = \frac{AB}{2} = 6$ cm. ($A'B'$ linie mijlocie în ΔSAB).

Fie $CN \perp PQ$, $CN = CO + NO = \frac{2}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm.

$A_{CPQ} = \frac{PQ \cdot CN}{2} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ cm.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei …………………………………………………………..	1p
a) Aplică teorema lui Pitagora în ΔSMC și obține $SM^2 = 72 - \frac{x^2}{4}, (1)$ ……………	1p
Aplică teorema lui Pitagora în ΔSMA, obține $SM^2 = \frac{3x^2}{4} - 72, (2)$ și egalând cele două relații deduce $x = 12$ ……………………………………………………………..	1p
Aplică reciproca teoremei lui Pitagora în ΔSAC și obține ΔSAC este dreptunghic ….	1p
b) Din $A'P \perp (ABC)$, $B'Q \perp (ABC)$, $SO \perp (ABC)$ deduce $A'P \parallel B'Q \parallel SO$, de unde obține $(A'P)$ linie mijlocie în ΔSAO, P este mijlocul $[AO]$, respectiv $(B'Q)$ linie mijlocie în ΔSBO, Q este mijlocul $[BO]$ și $A'P = B'Q = \frac{SO}{2}$. Deduce că $A'B'QP$ este paralelogram și $PQ = A'B' = \frac{AB}{2} = 6$ cm.	1p
Construiește $CN \perp PQ$ și obține $CN = 5\sqrt{3}$ cm ……………………………………..	1p
Finalizare: $A_{CPQ} = 15\sqrt{3}$ ……………………………………………………………...	1p