



Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a XII- a

Problema 1

- a) Calculați $\int (x^3 + 3x^2 + 6x + 4)\sqrt{x^2 + 2x + 4} dx, x \in \mathbb{R}$.
- b) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $e^{f(x)} + 3f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Problema 2

Fie $a \in (0, \infty)$ și $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară și continuă. Să se arate că

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^{kx}} dx = \int_0^a f(x) dx, \forall k \in \mathbb{R}$$

Problema 3

Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$ și legea de compoziție $*$ pe G definită prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

- a). Demonstrați că funcția $f: (-1, 1) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

- b). Să se arate că $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6} * \dots * \frac{1}{2022} = \frac{2022}{2024}$

Problema 4

Să se calculeze

$$\int_{-1}^1 \frac{(e^{x\sqrt{2}} + 1)^{-1}}{(\sqrt{2} - 1)^{-x} + (\sqrt{2} + 1)^{-x}} dx$$

Notă : Fiecare problemă se punctează de la 0 puncte la 7 puncte

Timp efectiv de lucru : 3 ore