

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
18 februarie 2018

CLASA a XII-a

1. Fie mulțimea $G = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$.

a) (4p) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup (" $\cdot$ " este operația de înmulțire a matricelor).

b) (3p) Arătați că grupul $(G, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2. (7p) Fie n un număr natural cu $2 \leq n \leq 1008$ și $(S_n, \cdot)$ grupul permutărilor de ordinul n .

Dacă $\sigma \in S_n$ și $\sigma^{2018} = e$, demonstrați că $\sigma^2 = e$.

Am notat cu e permutarea identică din S_n , $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

3. Fie M mulțimea tuturor funcțiilor continue $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

a) (4p) Pentru fiecare $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ considerăm funcția $f_\lambda: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda x - \frac{\lambda}{2}}$.

Arătați că $f_\lambda \in M$.

b) (3p) Determinați valoarea maximă a expresiei $\int_0^1 f^2(x) dx$ atunci când $f \in M$.

4. (7p) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenule monoton convergent la zero. Dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $f(x) \leq f(x + a_n)$, să se demonstreze că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.