

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26.02.2017
BAREM

CLASA a VIII- a

Subiectul I

a) Efectuarea calculului **(2p)**

$$b) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2017 \cdot 2018 \cdot 2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2018 \cdot 2019} \right) < \frac{1}{4} \quad \textbf{(2p)} .$$

$$c) \frac{1}{3k \cdot (3k+3) \cdot (3k+6)} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)} = \frac{1}{54} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot (k+1)} - \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} \right) \quad \textbf{(1p)}$$

Efectuarea calculelor **(2p)**

Subiectul II

a) Egalitatea $\sqrt{n(a-n)} = \frac{a}{2}$ este echivalentă cu $(a-2n)^2 = 0$, de unde $a = 2n$. **(2p)**

b) Egalitatea dată este echivalentă cu

$$(\sqrt{a_1-1}-1)^2 + (\sqrt{a_2-2}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{a_3-3}-\sqrt{3})^2 + \dots +$$

$$(\sqrt{a_{2017}-2017}-\sqrt{2017})^2 = 0, \text{ de unde } a_k = 2k, \text{ pentru } k = \overline{1, 2017}. \quad \textbf{(3p)}$$

c) Egalitatea dată este echivalentă cu

$$(\sqrt{a_1-1}-1)^2 + (\sqrt{a_2-2}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{a_3-3}-\sqrt{3})^2 + \dots + (\sqrt{a_{2016}-2016} + \sqrt{2016})^2 + (\sqrt{a_{2017}-2017}-\sqrt{2017})^2 = 0. \quad \text{Deoarece } \sqrt{a_{2k}-2k} = -\sqrt{2k}, \text{ pentru } k = \overline{1, 1008} \text{ nu are soluții în mulțimea numerelor reale, rezultă concluzia. } \textbf{(2p)}$$

Subiectul III

a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $DD' \perp (ABCD)$ și $DO \perp AC$ din $T3 \perp$ rezultă $D'O \perp AC$ **(1p)**.

Fie $DH \perp D'O$, din $R2$ $T3 \perp$ rezultă $DH \perp (ACD')$, deci piciorul perpendicularei duse din D pe planul (ACD') aparține înălțimii $D'O$. **(1p)**

Analog se arată că H aparține și înălțimii din C , deci H este ortocentrul triunghiului ACD' . **(1p)**

b) Din asemănarea triunghiurilor DHO și $B'HD'$, rezultă $D'H = 2OH$. **(1p)**

$$OH = \frac{a^2}{\sqrt{4b^2+2a^2}} \quad \textbf{(1p)}$$

$$D'H = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2+2a^2}} \quad (1p)$$

Din $D'H = 2OH$ rezultă $a = b$. (1p)

Subiectul IV

a) Condiția $\widehat{FBG} \equiv \widehat{CBE}$ este echivalentă cu $m(\widehat{GFB}) = 90^\circ$

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{24}{5}, AE = \frac{AB^2}{AC} = \frac{32}{5}, CE = \frac{18}{5}; CF = \frac{34}{5}; \quad (1p)$$

$$FB = \sqrt{FE^2 + EB^2} = \frac{8\sqrt{13}}{5}; GB = 2\sqrt{13}; \quad (1p)$$

Fie $AT \parallel FG, T \in [DC]$. Din asemănarea triunghiurilor FCG și ACT rezultă $\frac{GC}{CT} = \frac{CF}{AC} = \frac{GF}{AT}$,
de unde $CT = \frac{100}{17}, DT = 8 - CT = \frac{36}{17}, AT = \sqrt{AD^2 + DT^2} = \frac{30\sqrt{13}}{17}; GF = \frac{GC \cdot AT}{CT} = \frac{6\sqrt{13}}{5};$
(1p)

Deoarece $\boxed{GB^2 = GF^2 + FB^2}$ rezultă concluzia. (1p)

b) Conform subpunctului a) $FB \perp FG$ (1p).

Cum $MG \perp (ABC), FB \subset (ABC)$ rezultă $FB \perp MG$ (1p)

$FB \perp FG; FB \perp MG, MG, FG \subset (FGM)$, deci $FB \perp (MFG)$ (1p)