

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a V – a



1. Comparați numerele A și B, unde:

$$A = [3 + 9 \cdot 3^{24} + 3^{85} \cdot 3^{16} + 3 \cdot (3^3)^{25}] : (1 + 3^{25} + 3^{100} + 3^{75}) \cdot 2^{99}$$
$$B = 3^{68} - \{3^3 \cdot 15 - [5 - (10001 - 9376) : 5^3] \cdot 5^{2020} - 27 \cdot 3^2\} \cdot 3^{63}.$$

2. a) Aflați x din egalitatea:

$$2019^0 + 3 \cdot \{5^2 + 2^2 \cdot [3^5 - 3^2 \cdot (x - 2011)]\} = 2020.$$

b) Arătați că numărul: $x = \overline{20ab} - \overline{b(a+1)}$ este pătrat perfect, știind că are loc egalitatea:

$$\overline{abba} + \overline{abb} - \overline{aa} - b = 1 + 3 + 5 + \dots + 89 + 25^{3^2} : 25^{2^3}.$$

3. La un restaurant s-au adus cartofi. În prima zi s-a consumat o cincime din cantitatea de cartofi. A doua zi s-a consumat o cincime din rest. A treia zi s-a folosit un sfert din cantitatea rămasă. În a patra zi s-a folosit jumătate din cantitatea rămasă. Pentru a cincea zi au rămas 54 kg de cartofi. Ce cantitate de cartofi a fost adusă ?

4. a) Un număr natural împărțit la 13 dă restul 1 și împărțit la 3 dă restul 2. Care este restul împărțirii numărului la 39?

b) Trei numere naturale a, b, c îndeplinesc condițiile:

$$a + 2b + 5c = 51, \quad 5b = 8c \text{ și } 2c = a. \text{ Determinați cele trei numere. (GM)}$$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Țimp de lucru 2 ore.

BAREME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a V-a

1. Obținem $A = 3 \cdot (1 + 3^{25} + 3^{100} + 3^{75}) : (1 + 3^{25} + 3^{100} + 3^{75}) \cdot 2^{99}$ $A = 3 \cdot 2^{99}$. $B = 3^{68} - \{3^4 \cdot 5 - [5 - 625 : 125] \cdot 5^{2020} - 3^5\} \cdot 3^{63}$ $B = 3^{68} - 3^4 \cdot 2 \cdot 3^{63} = 3^{67}$. $\begin{cases} A = 3 \cdot 2^{99} = 3 \cdot (2^3)^{33} = 3 \cdot 8^{33} \\ B = 3^{67} = 3 \cdot (3^2)^{33} = 3 \cdot 9^{33} \end{cases}$ deci $A < B$.	2p 1p 2p 1p 1p	
2. a) Avem $1 + 3 \cdot \{25 + 4 \cdot [243 - 9 \cdot (x - 2011)]\} = 2020$ $\{25 + 4 \cdot [243 - 9 \cdot (x - 2011)]\} = 673$ $[243 - 9 \cdot (x - 2011)] = 162$ $x - 2011 = 9 \Rightarrow x = 2020$. b) $\overline{abba} + \overline{abb} - \overline{aa} - b = 1090a + 120b$ $1 + 3 + 5 + \dots + 89 = 45^2 = 2025$ $25^{32} : 25^{23} = 25$, iar ecuația $1090a + 120b = 2050$ are doar soluția $a = 1, b = 8$. $x = \overline{20ab} - \overline{b(a + 1)} = 2018 - 82 = 1936 = 44^2$.	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p	
3. Cât s-a folosit în a patra și a cincea zi: Rest 3 este $= 2 \cdot 54 = 108$ kg Restul 2 este $= 108 : 3 \cdot 4 = 144$ kg Restul 1 este $= 144 : 4 \cdot 5 = 180$ kg Cantitatea totală este $= 180 : 4 \cdot 5 = 225$ kg.		1p 2p 1p 1p
4. a) Fie a numărul natural; conform teoremei împărțirii cu rest avem: $\begin{cases} a = 13 \cdot q + 1 \\ a = 3 \cdot p + 2 \end{cases}$ unde $p, q \in \mathbb{N}$. Înmulțim prima egalitate cu 12, a doua cu 13 și scădem egalitățile obținute: $a = 13 \cdot a - 12 \cdot a = 39 \cdot p + 26 - 156 \cdot q - 12 = 39 \cdot (p - 4q) + 14$, deci $r = 14$. b) Deoarece $a + 2b + 5c = 51$, $5b = 8c$ înmulțim prima egalitate cu 5 și obținem $5 \cdot a + 2 \cdot 5b + 25c = 255$ și cum $2c = a \Rightarrow 51c = 255$ de unde $c = 5, b = 8$ și $a = 10$.	2p 2p 1p 2p	

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a VI – a



1. a) Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că cifrele sale sunt numere prime, care verifică egalitatea:
$$\overline{ab} + 53 \cdot \overline{ac} + \overline{bc} = 2020.$$

b) Să se determine numerele naturale prime a, b, c, d pentru care avem:
$$2a + 5b + 50c + 250d = 2020.$$
2. a) Știind că $\frac{a}{10} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = \frac{d}{1} = \frac{e}{11}$, arătați că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$.
b) Scrieți numărul 484 ca o sumă de patru pătrate perfecte. (GM)
3. Se consideră un segment AB și punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$.
a) Dacă $AA_1 = 3$ cm, $A_1A_2 = 3$ cm, $A_2A_3 = 2 \cdot 3^1$ cm, $A_3A_4 = 2 \cdot 3^2$ cm, $A_4A_5 = 2 \cdot 3^3$ cm, ..., $A_8B = 2 \cdot 3^7$ cm, aflați lungimea segmentului AB.
b) Dacă M, respectiv P, sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv A_8B , aflați lungimea segmentului MP.
4. Fie $\angle AOB, \angle BOC, \dots, \angle HOA$ opt unghiuri în jurul punctului O astfel încât $m(\angle AOB) = x^0$, $m(\angle BOC) = x^0 + 6^0$, $m(\angle COD) = x^0 + 2 \cdot 6^0$, $m(\angle DOE) = x^0 + 3 \cdot 6^0$, etc.
a) Aflați măsurile celor opt unghiuri.
b) Arăți că unghiul $\angle BOH$ este drept.
c) Arăți că punctele A, O, F sunt coliniare.

Toate subiectele sunt obligatorii.

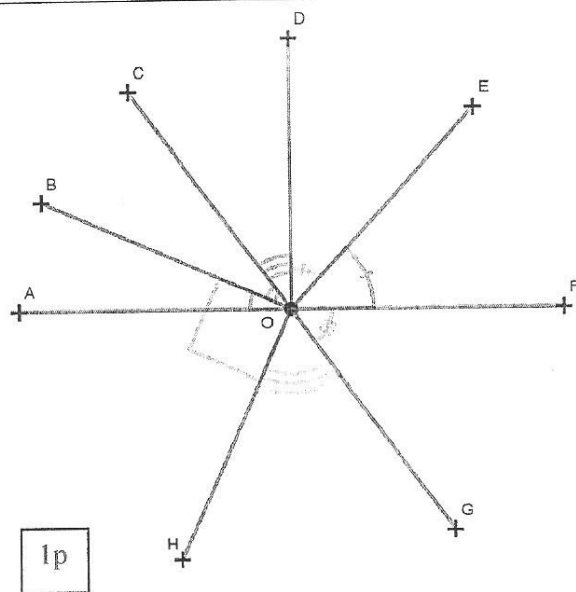
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 2 ore.

BAREME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a VI - a

1. a) Relația $\overline{ab} + 53 \cdot \overline{ac} + \overline{bc} = 2020$ este echivalentă cu $54\overline{ac} + 11b = 2020$ de unde cum b este nr. prim $\Rightarrow b = 2$. Din $54\overline{ac} = 1998 \Rightarrow \overline{ac} = 37$, de unde $\overline{abc} = 327$. b) Din $2a + 5b + 50c + 250d = 2020$ cu a, b nr. prime $\Rightarrow a = 5, b = 2$. Rezultă $c + 5d = 40$ de unde $c = 5, d = 7$.	1p 2p 2p 2p
2. a) Fie $k = \frac{a}{10} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = \frac{d}{1} = \frac{e}{11}$ de unde $\left. \begin{aligned} \frac{a}{10} &= k \Rightarrow a = 10k \\ \frac{b}{4} &= k \Rightarrow b = 4k \\ \frac{c}{2} &= k \Rightarrow c = 2k \\ \frac{d}{1} &= k \Rightarrow d = k \\ \frac{e}{11} &= k \Rightarrow e = 11k \end{aligned} \right\} (1)$ Înlocuind valorile (1) în suma $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ avem: $m_s = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (10k)^2 + (4k)^2 + (2k)^2 + k^2 = 121k^2$ și $m_d = e^2 = 121k^2$ deci $m_s = m_d \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$. b) Folosim rezultatul de la a). Constatăm că 484 ar trebui să fie e^2. Într-adevăr $22^2 = e^2 \Rightarrow e = 22 \Rightarrow \frac{e}{11} = \frac{22}{11} = 2 = k$. Pentru $k = 2 \Rightarrow a = 20, b = 8, c = 4, d = 2$ și cum $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 \Rightarrow 484 = 22^2 = 20^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2$.	2p 2p 1p 2p
 3. a) Avem $AB = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_7A_8 + A_8B$ deci $AB = 3 + 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^7 =$ $= 6 + 2 \cdot \frac{3^8 - 3}{2} = 3^8 + 3 = 6564$. b) Din M mijlocul $AB \Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = 3282$. Din P mijlocul $A_8B \Rightarrow A_8P = PB = \frac{A_8B}{2} = \frac{2 \cdot 3^7}{2} = 3^7 = 2187$. $MP = MB - PB = 3282 - 2187 = 1095$.	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p

4. a) Avem: $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) + \dots + m(\angle HOA) = 360^\circ$
 $\Rightarrow x^\circ + (x^\circ + 6^\circ) + (x^\circ + 2 \cdot 6^\circ) + \dots + (x^\circ + 7 \cdot 6^\circ) = 360^\circ$
 $8x + 6 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 360^\circ$ de unde $x = 24^\circ$ și
 atunci : $m(\angle AOB) = 24^\circ$;
 $m(\angle BOC) = 30^\circ$;
 $m(\angle COD) = 36^\circ$;
 $\dots$; $m(\angle HOA) = 66^\circ$.
 b) $m(\angle BOH) = m(\angle BOA) + m(\angle HOA) = 24^\circ + 66^\circ = 90^\circ$.
 c) $m(\angle AOF) = m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) + m(\angle DOE) + m(\angle EOF) = 24^\circ + 30^\circ + 36^\circ + 42^\circ + 48^\circ = 180^\circ$.



1p

1p

1p

1p

1p

1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ALBA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a VII – a



1. Arătați că: $\frac{a}{\sqrt{673 \cdot 875 - b}} > 1$, unde:

$$a = 27\sqrt{27} + 48\sqrt{48} + 75\sqrt{75} + \sqrt{1875}, \text{ iar } b = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2018}\right).$$

2. a) Determinați numărul natural $n = \overline{ab}$ pentru care:

$$7\sqrt{n} = 4(a + b). \quad (\text{GM})$$

b) Găsiți numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care este adevărată relația:

$$\sqrt{1 \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{b} + 3 \cdot \sqrt{cb} + 4 \cdot \sqrt{c}} = d.$$

3. Se dă $\triangle ABC \cong \triangle CDE$, cu $AB \cong AC \cong CD \cong CE$, $m(\angle ACD) = 90^\circ$, A și E de o parte și de alta a lui BC. Dacă M, respectiv N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv BE, iar P este simetricul lui M față de N, arătați că BMEP este pătrat.

4. În pătratul ABCD de centru O, fie $M \in BD$, $N \in AC$ astfel încât $DM = NO = \frac{AC}{4}$ și $E, F \in DC$

astfel încât $DE = EF = \frac{DC}{3}$. Arătați că:

a) punctele A, M, E sunt coliniare;

b) dreapta $FO \perp BN$;

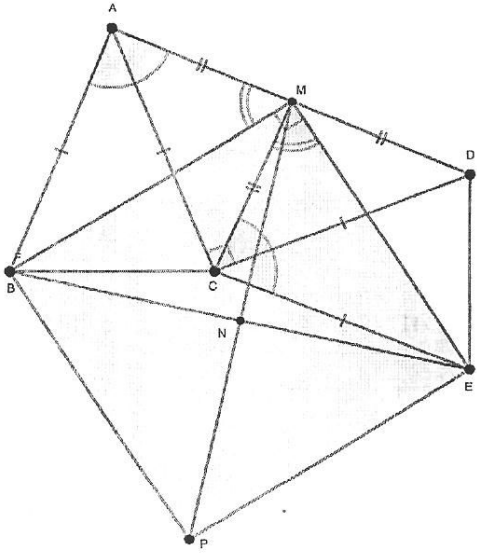
c) are loc relația $6 \cdot GO = AE$, unde $AF \cap OE = \{G\}$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

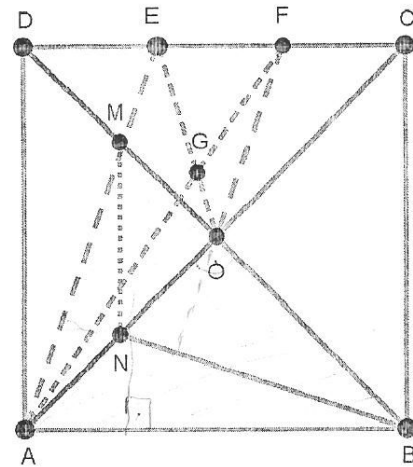
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

BAREME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a VII – a

1. Obținem $a = 27 \cdot 3\sqrt{3} + 48 \cdot 4\sqrt{3} + 75 \cdot 5\sqrt{3} + 25\sqrt{3}$ de unde $a = 673\sqrt{3}$. Apoi $b = \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{10}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2020}{2018}$ de unde $b = \frac{2019 \cdot 2020}{5 \cdot 6} = 673 \cdot 202$. Atunci $\frac{a}{\sqrt{673 \cdot 875 - b}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673 \cdot 875 - 673 \cdot 202}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673 \cdot (875 - 673)}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673^2}} = \sqrt{3} > 1$.	2p 1p 2p 1p 1p
2. a) Deducem că $\overline{ab}$ este pătrat perfect $\Rightarrow \overline{ab} \in \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$. (1) Din egalitatea dată deducem că $7\sqrt{\overline{ab}} : 4$. (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow 7\sqrt{16}, 7\sqrt{64} : 4$, de unde doar $7\sqrt{16}$ verifică relația dată, $n = \overline{ab} = 16$. b) Deducem că $a, b, c, \overline{cb}$ sunt pătrate perfecte. Din $\overline{cb}$ pătrat perfect $\Rightarrow \overline{cb} \in \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$. Din c, b pătrate perfecte $\Rightarrow \overline{cb} = 49 \Rightarrow c = 4, b = 9$. Atunci $\sqrt{1 \cdot \sqrt{a}} + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = d \Rightarrow \sqrt{\sqrt{a}} + 35 = d \Rightarrow a = 1, d = 6$ și $\overline{abcd} = 1946$	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
3. Din $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ și $AB = AC = CD = CE$ $\Rightarrow \angle BAD = \angle ECD$. Din $m(\angle ACD) = 90^\circ$ și $AC = CD \Rightarrow \triangle ACD$ dreptunghic isoscel și $m(\angle CAD) = m(\angle ADC) = 45^\circ$, iar cum M este mijlocul lui AD $\Rightarrow$ CM este înălțime, mediană, bisectoarea $\angle ACD \Rightarrow$ $m(\angle ACM) = m(\angle MCD) = 45^\circ$, $m(\angle AMC) = m(\angle CMD) = 90^\circ$, $AM = MC = MD$. Rezultă că $\triangle ABM \cong \triangle CME$ (caz L.U.L.) $\Rightarrow \angle AMB = \angle CME$, $BM = ME$. Din ipoteză N este mijlocul lui BE, respectiv al segmentului MP, de unde deducem că BMEN este paralelogram. Dar $m(\angle AMC) = 90^\circ$, iar $m(\angle AMC) = m(\angle AMB) + m(\angle BMC) =$ $m(\angle CME) + m(\angle BMC) = m(\angle BME) = 90^\circ$. Deci BMEN este dreptunghi și cum are $BM = ME$ va fi pătrat.	 1p 2p 1p 1p 1p 1p

4. a) **Sol 1.** În $\triangle AEC$ avem FO =linie mijlocie $\Rightarrow AE \parallel FO$ (1).
 În $\triangle DFO$ avem ME =linie mijlocie $\Rightarrow ME \parallel FO$ (2).
 Din (1) și (2) $\Rightarrow$ punctele A, M, E sunt coliniare.
Sol 2. Avem $\triangle DOC$ și $E \in DC, M \in DO, A \in CO$,
 iar $\frac{DE}{EC} \cdot \frac{CA}{OA} \cdot \frac{MO}{MD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{\frac{d}{4}}{\frac{d}{4}} = 1 \xrightarrow{R.T. Menelaus}$ punctele
 A, M, E sunt coliniare.
 b) În $\triangle ADO$ avem MN =linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AD$ și cum $AD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$.



- În $\triangle ABM$ avem $MN \perp AB$ (deci MN înălțime), $AO \perp BM$ (deci AO înălțime), iar $MN \cap AO \cap BN = \{N\}$ deci N este ortocentrul $\triangle ABM$, astfel $BN \perp AM$, dar $AE \parallel FO$, ($M \in AE$) de unde $FO \perp BN$.
 c) În $\triangle AEC$ avem AF mediană, EO mediană, $AF \cap EO = \{G\}$, deci G este centru de greutate și prin urmare $GO = \frac{1}{3} \cdot EO$ (*). Dar $\triangle DEO \cong \triangle CFO$ (cazul L.U.L.) și $EO = FO$ (**), iar FO fiind linie mijlocie (1) este $FO = \frac{1}{2} \cdot AE$ (***).
 Din (*), (**), (***) rezultă $6 \cdot GO = AE$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a VIII – a



1. a) Arătați că

$$\left(\frac{5}{2a+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a^2+3a+1} \right) \cdot \frac{3a+3}{2a^2-a-1} \cdot (a+1) < a^2 - a$$

Pentru orice $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. (GM)

b) Aflați minimul expresiei:

$$E = a^2 + b^2 - ab - a - b + 2021.$$

2. a) Rezolvați ecuația: $\sqrt{x - \sqrt{11 + \sqrt{x^2}}} = 1.$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$3x^2 - 2xy - y - 1 = 0.$$

3. În paralelipipedul dreptunghic ABCDEFGH cu $AB = 2a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, $AE = a\sqrt{3}$. Arătați că:

a) $AC + AF + AH \geq (3a\sqrt{3} + 2a)\sqrt{2}.$

b) Dacă M este mijlocul muchiei AE, iar $AH \cap MD = \{S\}$, $AF \cap MB = \{T\}$ atunci $ST \parallel (FCH).$

4. Fie $\triangle ABC$ echilateral de latură a , $D \in AB$ astfel încât $AD = \frac{a}{6}$ și ducem $DE \perp AB$, $E \in AC$, unde se ridică $ME \perp (ABC)$. Arătați că:

a) $MC^2 > MA \cdot MB$

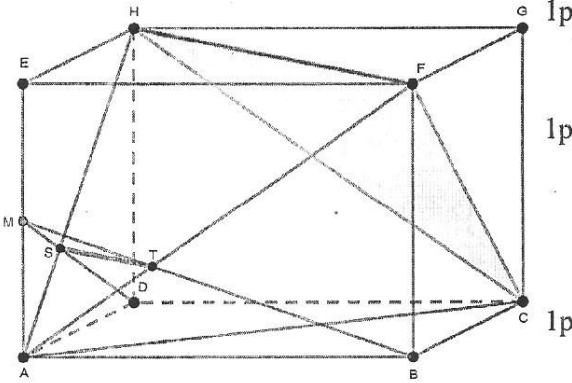
b) Aflați lungimea segmentului ME, dacă $3 \cdot MD = 2\sqrt{3} \cdot ME.$

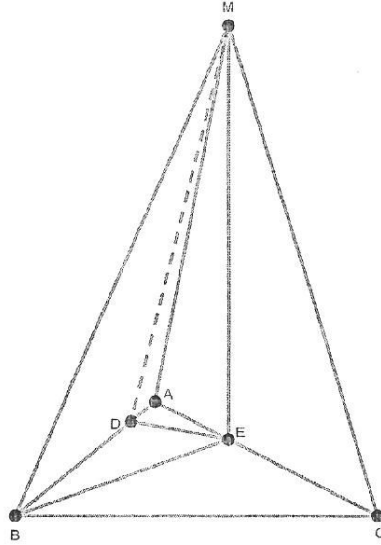
Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

BAREME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ 8.02.2020
CLASA a VIII – a

1. a) Relația $\left(\frac{5}{2a+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a^2+3a+1}\right) : \frac{3a+3}{2a^2-a-1} \cdot (a+1) < a^2 - a$ este echivalentă cu $\left(\frac{5(a+1)-(2a+1)-1}{(2a+1)(a+1)}\right) : \frac{3(a+1)}{2a^2-a-1} \cdot (a+1) < a^2 - a$ și cum $2a^2 - a - 1 = (2a+1)(a-1)$ avem $\left(\frac{3(a+1)}{(2a+1)(a+1)}\right) \cdot \frac{(2a+1)(a-1)}{3(a+1)} \cdot (a+1) < a^2 - a$ adică $a-1 < a^2 - a \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0$ (A) b) Înmulțim egalitatea $E = a^2 + b^2 - ab - a - b + 2021$ cu 2 și obținem: $2E = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + 4040$ de unde $E_{min} = 2020$ se obține când $a = b = 1$.	3p 2p 2p
2. a) Ecuația: $\sqrt{x - \sqrt{11 + \sqrt{x^2}}} = 1$ este echivalentă cu $x - \sqrt{11 + \sqrt{x^2}} = 1$ sau $\sqrt{11 + \sqrt{x^2}} = x - 1$ cu condiția $x > 1$. Ridicând la pătrat obținem $x^2 - 2x + 1 = 11 + x$, de unde $x^2 - 3x - 10 = 0$. Cum $x^2 - 3x - 10 = x^2 + 2x - 5x - 10 = (x+2)(x-5)$ găsim $x_1 = -2$ (nu convine) și $x_2 = 5$ ce ne convine. Proba: $\sqrt{5 - \sqrt{11 + \sqrt{5^2}}} = 1$ b) Ecuația se scrie echivalent $y = \frac{3x^2-1}{2x+1}$, deci pentru a obține soluții întregi, este necesar ca întregul $2x+1$ să dividă întregul $3x^2-1$. În acest caz $2x+1$ divide și pe $4(3x^2-1) = 3(4x^2-1) - 1 = 3(2x-1)(2x+1) - 1$. Deducem $2x+1 = \pm 1$, de unde $x = -1$ sau $x = 0$; obținem soluțiile $x = -1, y = -2$ și $x = 0, y = -1$.	1p 1p 1p 1p 1p 1p
3. a) Aplic inegalitatea mediilor $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$ ce este echivalentă cu $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{x+y}{2} \sqrt{2}$. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2} \geq \frac{2a\sqrt{3}+2a}{2} \sqrt{2}$ (1). $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{3})^2} \geq \frac{2a\sqrt{3}+a\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}$ (2). $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} \geq \frac{2a+a\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}$ (3).	 1p 1p 1p

Adun relațiile (1), (2) și (3) și obținem $AC + AF + AH \geq (3a\sqrt{3} + 2a)\sqrt{2}$. b) $MA \parallel DH \Rightarrow \triangle MSA \sim \triangle DSH \Rightarrow \frac{AS}{SH} = \frac{MA}{DH} = \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{AS}{AH} = \frac{1}{3}$. $MA \parallel BF \Rightarrow \triangle MTA \sim \triangle BTF \Rightarrow \frac{AT}{TF} = \frac{MA}{BF} = \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{AT}{AF} = \frac{1}{3}$. În $\triangle AHF$ avem $\frac{AS}{AH} = \frac{AT}{AF} = \frac{1}{3} \Rightarrow ST \parallel HF$ și cum $HF \subset (FCH)$ deducem $ST \parallel (FCH)$.	1p 1p 1p 1p
4. a) În $\triangle ADE$ cu $m(\angle DAE) = 60^\circ$, $m(\angle HOA) = 90^\circ$ avem $AE = 2 \cdot AD = \frac{a}{3}$, $\Rightarrow EC = \frac{2a}{3}$ iar $BE = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Atunci $MA^2 = ME^2 + \frac{a^2}{9}$, $MB^2 = ME^2 + \frac{7a^2}{9}$, iar $MC^2 = ME^2 + \frac{4a^2}{9}$ de unde $MC^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} > \sqrt{MA^2 \cdot MB^2} = MA \cdot MB.$ b) Din $\triangle ADE$ cu $m(\angle ADE) = 90^\circ$ avem $DE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, atunci $MD^2 = ME^2 + \frac{a^2}{12}$. Dar $3 \cdot MD = 2\sqrt{3} \cdot ME$ adică $9 \cdot MD^2 = 12 \cdot ME^2$, deci $9 \cdot \left(ME^2 + \frac{a^2}{12} \right) = 12 \cdot ME^2 \Rightarrow ME^2 = \frac{a^2}{4}$, astfel $ME = \frac{a}{2}$.	 2p 2p 1p 1p 1p