

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A XII-A

SUBIECTE

Problema 1. Calculați $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx$.

Gazeta Matematică nr 10/2023

Problema 2. Pe $M = (0, \infty)$ se definește o lege de compoziție astfel încât

$x * \frac{1}{y} = y^2(x * y)$, $x * \frac{2}{y} = \frac{y^2}{2}(x * y)$ și $(x * y)(x * 64y) = \left(\frac{x^2 + 1}{32xy}\right)^2$, oricare ar fi $x, y \in M$. Să se studieze asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru această lege de compoziție.

Prof. Gabriel Daniilescu, Brăila

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit, $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, în care ecuația $t^3 = e$, are soluție unică, e fiind elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$. Arătați că există $b_1, b_2, \dots, b_n \in G$, cu $b_1^3 a_1 = e, b_2^3 a_2 = e, \dots, b_n^3 a_n = e$. Calculați $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^4$.

Prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Problema 4. Fie $0 < a < b \leq 1$. Să se arate că $\int_{\frac{a+b}{8\sqrt{ab}}}^{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}} \frac{dx}{\sqrt{(a+b)x - 2\sqrt{ab}x^2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12\sqrt{ab}}$.

Prof. George-Florin Șerban, Brăila